

COURS PEDAGOGIQUE

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Chapitre III : Le milieu continu — une modélisation

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

17 mai 2026

Plan du cours

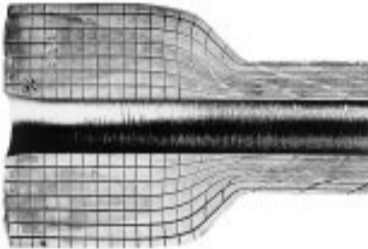
- 1 Échelle, modélisation, validation
- 2 Les concepts et leur formulation
 - L'idée directrice
 - Configurations du système
- 3 Points de vue de Lagrange et d'Euler
- 4 Description lagrangienne
 - Définition
 - Hypothèses de continuité
 - Pertinence du modèle
 - Trajectoires et lignes d'émission
 - Vitesse d'une particule
- 5 Description eulérienne
 - Définition
 - Détermination des trajectoires
 - Lignes de courant
 - Mouvements stationnaires

Section 1

Échelle, modélisation, validation

- 1
- 2 Les concepts et leur formulation
- 3 Points de vue de Lagrange et d'Euler
- 4 Description lagrangienne
- 5 Description eulérienne

1



C'est de l'observation de la déformation d'un solide — au cours d'une opération de formage à froid ou à chaud, de l'écoulement d'un liquide, de la détente ou de la compression d'un gaz — que la notion de **milieu continu déformable** tire son origine.

Elle signifie que certains problèmes peuvent être traités à une échelle **macroscopique** en assimilant la matière à un milieu "continu", sans contredire les modélisations de la physique microscopique.

La notion *d'échelle* pertinente pour un problème est ainsi introduite : liée évidemment aux phénomènes mis en jeu, elle dépend de façon essentielle de la nature des questions que l'on se pose à leur propos.

On se propose dans le présent **chapitre** de cerner, puis de formuler mathématiquement, le **concept de continuité**. On présentera ainsi la modélisation du milieu continu classique tridimensionnel, dont les applications concernent tant la mécanique des solides déformables que la mécanique des fluides.

Section 2

Les concepts et leur formulation

① Échelle, modélisation, validation

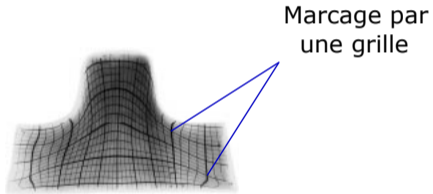
② L'idée directrice
Configurations du système

③ Points de vue de Lagrange et d'Euler

④ Description lagrangienne

⑤ Description eulérienne

2



Dans une démarche expérimentale, l'observateur est conduit à procéder au marquage d'éléments matériels et à repérer ensuite leur évolution géométrique.

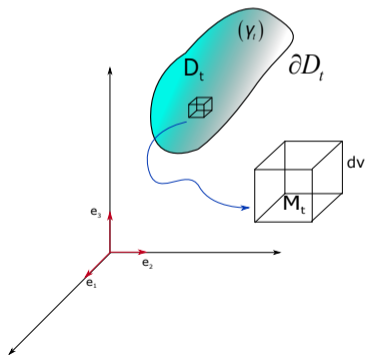
Le marquage d'un tel élément concerne un "petit domaine matériel", infinitésimal à **l'échelle macroscopique** du mécanicien, mais au-dessus de **l'échelle microscopique** du physicien.

Le concept intuitif de continuité se réfère à l'évolution des positions géométriques de ces éléments marqués au cours du temps.

La modélisation mathématique du concept physique de continuité sera donc d'abord **géométrique**.

Milieu continu

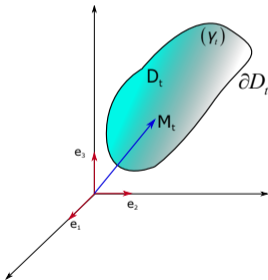
Un milieu continu est un ensemble de particules matérielles occupant, à l'instant t , un domaine tridimensionnel D_t de volume γ_t . Les particules macroscopiques sont appelées **volumes élémentaires** dv .



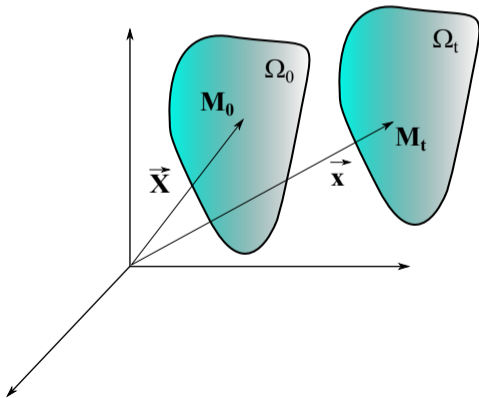
Ces particules vérifient les hypothèses :

- ▶ H_1 : deux particules distinctes occupent des positions distinctes.
- ▶ H_2 : deux particules voisines à l'instant t restent voisines à tout autre instant.

L'état du système à l'instant t dans un référentiel R est appelé **configuration de ce système**. On désigne par γ_t la configuration actuelle à t . Le repérage se fait au moyen du vecteur-position \overrightarrow{OM} , noté aussi \vec{x} .



On introduit la notion de **configuration de référence** : c'est la configuration particulière γ_0 du système à un instant t_0 **fixé**. Les coordonnées des vecteurs-positions $\overrightarrow{OM_0}$ dans γ_0 sont notées (X, Y, Z) ou X^i ($i = 1, 2, 3$). Le vecteur $\overrightarrow{OM_0}$ est noté \vec{X} .



$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \vec{x}, & \text{coordonnées } (x, y, z) \text{ dans } \gamma_t \\ \overrightarrow{OM_0} = \vec{X}, & \text{coordonnées } (X, Y, Z) \text{ dans } \gamma_0 \end{cases}$$

Section 3

Points de vue de Lagrange et d'Euler

- 1 Échelle, modélisation, validation
- 2 Les concepts et leur formulation
- 3
- 4 Description lagrangienne
- 5 Description eulérienne

3

Deux points de vue coexistent lorsqu'il s'agit de décrire un mouvement : les descriptions **lagrangienne** et **eulérienne** du mouvement.

La première est plus adaptée à la mécanique du solide, et la deuxième à la mécanique des fluides, mais cette distinction n'est pas figée.

En réalité, chacune de ces descriptions propose des outils qui simplifieront plus ou moins la définition et la résolution d'un problème en fonction d'un contexte donné.

Section 4

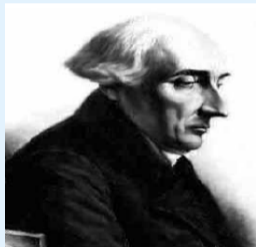
Description lagrangienne

- 1 Échelle, modélisation, validation
- 2 Les concepts et leur formulation
- 3 Points de vue de Lagrange et d'Euler
- 4
 - Définition
 - Hypothèses de continuité
 - Pertinence du modèle
 - Trajectoires et lignes d'émission
 - Vitesse d'une particule
- 5 Description eulérienne

4

La description lagrangienne consiste à :

- ▶ Identifier les particules constitutives du système par leur position géométrique dans la configuration de référence γ_0 , c'est-à-dire par la variable vectorielle \vec{X} .
- ▶ Exprimer la valeur de toute grandeur physique dans la configuration actuelle en fonction de la particule et de l'instant actuel, c'est-à-dire en fonction de \vec{X} et t .



Joseph-Louis Lagrange
1736 - 1813

Joseph-Louis Lagrange, né à Turin en 1736 et mort à Paris en 1813, est un mathématicien, mécanicien et astronome italien naturalisé français.

À l'âge de trente ans, il quitte le Piémont et séjourne à Berlin pendant vingt-et-un ans. Il s'installe ensuite à Paris pour ses vingt-six dernières années, où il obtient la nationalité française sur l'instance d'Antoine Lavoisier.

Le vecteur-position $\overrightarrow{OM} = \vec{x}$ de la particule située initialement en M_0 dans γ_0 est donné par :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t)$$

La fonction $\vec{\phi}$ est définie sur Ω_0 , $\forall t$, et vérifie :

$$\vec{\phi}(\vec{X}, 0) = \vec{X}$$

La fonction $\vec{\phi}$ décrit la correspondance géométrique entre les configurations γ_0 et γ_t , et en fonction de t , toute l'évolution géométrique du système S .

Conditions mathématiques sur $\vec{\phi}$ permettant de rendre compte du concept de continuité :

- ▶ $\vec{\phi}$ est une **bijection** de Ω_0 sur Ω_t dont on désigne par $\vec{\psi}$ la bijection réciproque :

$$\forall t, \forall M_0 : \vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) \Leftrightarrow \forall t, \forall M : \vec{X} = \vec{\psi}(\vec{x}, t)$$

- ▶ $\vec{\phi}$ et $\vec{\psi}$ sont **continues** par rapport à l'ensemble des variables d'espace et de temps.

Conséquences classiques

1. Deux particules infiniment voisines dans γ_0 restent infiniment voisines dans toute configuration.
2. Des particules occupant un domaine connexe dans γ_0 occupent un domaine connexe dans γ_t .
3. Les particules à l'intérieur d'une surface fermée dans γ_0 restent à tout instant à l'intérieur de la surface transportée.
4. Soit $J(\vec{X}, t)$ le déterminant de la matrice jacobienne :

$$J(\vec{X}, t) = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)}$$

$\vec{\phi}$ étant continûment dérivable de même que $\vec{\psi}$, le jacobien $J(\vec{X}, t)$ est continu par rapport à X et t . Il ne peut être ni nul ni infini, puisque les matrices jacobiennes de $\vec{\phi}$ et $\vec{\psi}$ doivent être inversibles. Il conserve donc un signe constant.

Il résulte de $J(\vec{X}, 0) = 1, \forall M_0 \in \Omega_0$ que :

$$0 < J(\vec{X}, t) < +\infty$$

Données

Description spatiale du mouvement d'un milieu continu :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) \equiv \begin{cases} x_1 = X_1 e^{2t} \\ x_2 = X_2 e^{-2t} \\ x_3 = 5X_1 t + X_3 e^{2t} \end{cases}$$

Étape 1 — Condition de consistance

$$\vec{\phi}(\vec{X}, 0) \equiv \begin{cases} X_1 e^0 \\ X_2 e^0 \\ 5X_1 \cdot 0 + X_3 e^0 \end{cases} = \begin{cases} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{cases} = \vec{X} \quad \checkmark$$

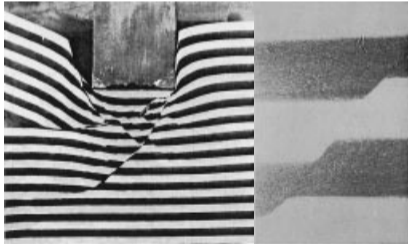
Étape 2 — Le jacobien $J(\vec{X}, t)$ doit être positif

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 5t & 0 & e^{2t} \end{vmatrix} = e^{2t} \cdot e^{-2t} \cdot e^{2t} = e^{2t} > 0 \quad \checkmark$$

Étape 3 — Équation inverse

$$\varphi^{-1}(\vec{x}, t) = \begin{cases} X_1 = x_1 e^{-2t} \\ X_2 = x_2 e^{2t} \\ X_3 = x_3 e^{-2t} - 5x_1 t e^{-4t} \end{cases}$$

On est amené à nuancer les hypothèses pour traiter des cas comme les fissures rencontrées en mécanique de la rupture, les surfaces de glissement, la localisation de la déformation.

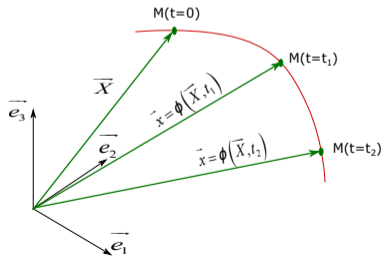


On convient d'affaiblir les hypothèses de continuité en n'imposant plus que **la continuité et la continue différentiabilité de $\vec{\phi}$ par morceaux** : des discontinuités de ϕ et/ou de ses dérivées sont permises au franchissement d'une infinité dénombrable de surfaces dans \mathbb{R}^3 .

Si l'on considère la particule identifiée par \vec{X} , l'équation $\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t)$ décrit sa **trajectoire** paramétrée en fonction du temps :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t), \quad \vec{X} \text{ fixe}$$

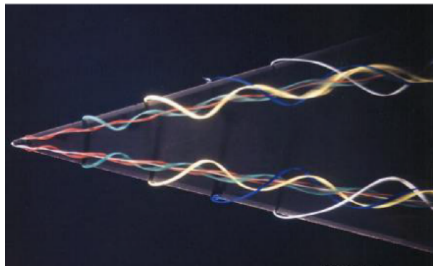
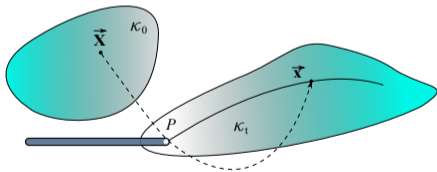
Pour cette raison on dit aussi que la description lagrangienne est une description “par trajectoires”.



En un point géométrique P de coordonnées \vec{x}_P , on marque chaque particule passant par P ; on observe, à l'instant $T > t_0$, les positions de ces particules : la courbe correspondante est la **ligne d'émission du point P** observée à l'instant T .

L'équation paramétrée en t' de cette courbe :

$$\vec{x} = \vec{\phi} \left(\vec{\psi}(\vec{x}_P, t'), T \right), \quad t_0 \leq t' \leq T$$



Vitesse

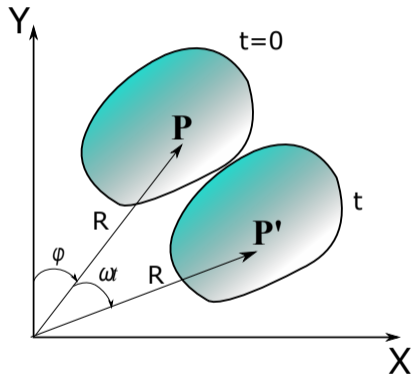
La vitesse, dans le référentiel R , de la particule identifiée par \vec{X} dans γ_0 :

$$\vec{v}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{\phi}(\vec{X}, t)}{\partial t}$$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire de la particule.

Accélération

$$\vec{\gamma}(\vec{X}, t) = \frac{\partial^2 \vec{\phi}(\vec{X}, t)}{\partial t^2}$$

**Données**

Solide en rotation à vitesse constante ω :

$$\begin{cases} x = R \sin(\omega t + \phi) \\ y = R \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Conditions initiales ($t = 0$)

$$X = R \sin \phi, \quad Y = R \cos \phi$$

Équation du mouvement en description lagrangienne

$$\begin{cases} x = X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t) \\ y = -X \sin(\omega t) + Y \cos(\omega t) \end{cases}$$

Vitesse

$$\begin{cases} v_x = -X\omega \sin(\omega t) + Y\omega \cos(\omega t) \\ v_y = -X\omega \cos(\omega t) - Y\omega \sin(\omega t) \end{cases}$$

Accélération

$$\begin{cases} \gamma_x = -X\omega^2 \cos(\omega t) - Y\omega^2 \sin(\omega t) \\ \gamma_y = -X\omega^2 \sin(\omega t) - Y\omega^2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

Section 5

Description eulérienne

- 1 Échelle, modélisation, validation
- 2 Les concepts et leur formulation
- 3 Points de vue de Lagrange et d'Euler
- 4 Description lagrangienne
- 5
 - Définition
 - Détermination des trajectoires
 - Lignes de courant
 - Mouvements stationnaires

5

La description eulérienne de l'évolution consiste à prendre, à chaque instant, la **configuration actuelle** comme configuration de référence pour décrire l'évolution infinitésimale entre t et $(t + dt)$.

Pour l'aspect géométrique, la description eulérienne définit le mouvement par la donnée, à chaque instant t , de la vitesse \vec{v}_t de la particule située au point M dans γ_t :

$$\forall t, \forall M \in \Omega_t, \quad \vec{v} = \vec{v}_t(\vec{x}, t)$$



Leonard Euler
1707 - 1783

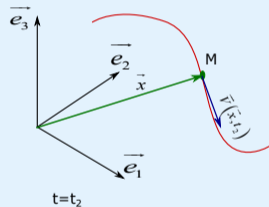
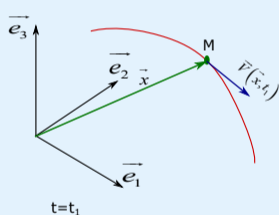
Leonhard Euler, né à Bâle en 1707 et mort à Saint-Pétersbourg en 1783, est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie dans l'Empire russe et en Allemagne.

Euler est considéré comme un éminent mathématicien du 18^{ème} siècle et l'un des plus grands et des plus prolifiques de tous les temps.

« *Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous.* » — P.-S. de Laplace

Toute grandeur physique est définie sur γ_t sous la forme :

$$\forall t, \forall M \in \Omega_t, \quad B = b(\vec{x}, t)$$



Convention de notation

Minuscules (comme \vec{x}) : fonctions relatives à la description eulérienne. **Majuscules** (comme \vec{X}) : fonctions relatives à la description lagrangienne.

La description eulérienne s'obtient de façon immédiate dès que l'on connaît la description lagrangienne :

$$\begin{cases} \vec{v}_t(\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{\psi}(\vec{x}, t), t) \\ b(\vec{x}, t) = B(\vec{\psi}(\vec{x}, t), t) \end{cases}$$

Il faut résoudre le système différentiel (condition initiale $\vec{\phi}(\vec{X}, 0) = \vec{X}$) :

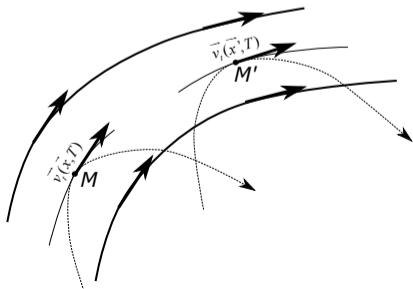
$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{\phi}(\vec{X}, t)}{\partial t} = \vec{v}_t(\vec{\phi}(\vec{X}, t), t) \\ d\vec{x} = \vec{v}_t(\vec{x}, t) dt \end{cases}$$

système de 3 équations différentielles pour les 3 fonctions scalaires inconnues x_1, x_2, x_3 .

À un instant donné T , les **lignes de courant** sont les lignes enveloppes du champ des vecteurs vitesses $\vec{v}_t(\vec{x}, T)$, définies par :

$$\frac{dx_1}{v_1(\vec{x}, T)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x}, T)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x}, T)}$$

C'est un système différentiel de 2 équations en x_1, x_2, x_3 . Les lignes de courant constituent **une famille de courbes géométriques à 2 paramètres**.



Le mouvement est dit **stationnaire** (ou permanent) dans un référentiel R si, dans sa description eulérienne, $\vec{v}_t(\vec{x}, t)$ est indépendante de t et n'est fonction que des coordonnées du point géométrique M .

Il en résulte :

$$\frac{dx_1}{v_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x})} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x})}$$

Propriété importante

Ainsi les trajectoires forment une famille de courbes géométriques à 2 paramètres, identique à la famille des **lignes de courant** qui deviennent, dans ce cas, indépendantes du temps.

Merci de votre attention !

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

MMC