

COURS PEDAGOGIQUE

# MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

*Chapitre IV : Déformation du milieu continu*

**Mr. ZENNADI Karim**

Enseignant Chercheur — ENP

17 mai 2026

- 1 Introduction
- 2 Gradient d'une transformation
  - Tenseur gradient d'une transformation
  - Transport convectif d'un vecteur
- 3 Tenseur des dilatations
  - Dilatation dans une direction
  - Glissement de deux directions orthogonales
  - Évolution des volumes
  - Décomposition polaire
- 4 Tenseurs des déformations
  - Tenseur de Green-Lagrange
- 5 Formulation en fonction des déplacements
- 6 Hypothèse des petites déformations
- 7 Hypothèse des petites transformations
- 8 Conditions de compatibilité

## Section 1

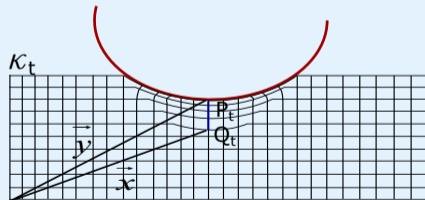
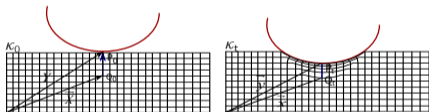
# Introduction

---

- 1
- 2 Gradient d'une transformation
- 3 Tenseur des dilatations
- 4 Tenseurs des déformations
- 5 Formulation en fonction des déplacements
- 6 Hypothèse des petites déformations
- 7 Hypothèse des petites transformations

1

La figure représente l'indentation d'un solide par un cylindre. Un réseau de lignes initialement orthogonales est distordu après déformation dans la configuration  $\mathcal{K}_t$ .



La distorsion du réseau :

- ▶ n'est pas constante dans tout le solide ;
- ▶ se traduit par une variation des angles initialement droits ;
- ▶ se traduit par une variation des longueurs.

Dans la suite de ce chapitre, nous introduirons une **mesure de la distorsion angulaire** et une **mesure de la variation des longueurs**. Ces mesures doivent être locales, puisque les distorsions du réseau peuvent varier dans le solide.

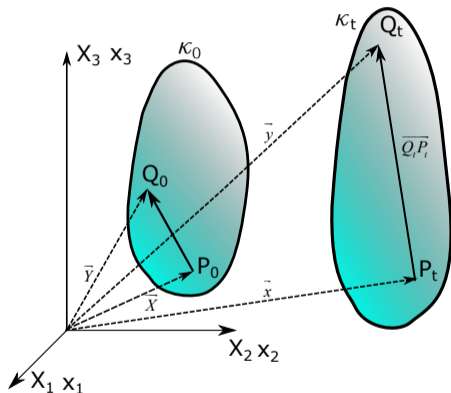
## Section 2

# Gradient d'une transformation

---

- 1 Introduction
- 2 Tenseur gradient d'une transformation  
Transport convectif d'un vecteur
- 3 Tenseur des dilatations
- 4 Tenseurs des déformations
- 5 Formulation en fonction des déplacements
- 6 Hypothèse des petites déformations

2



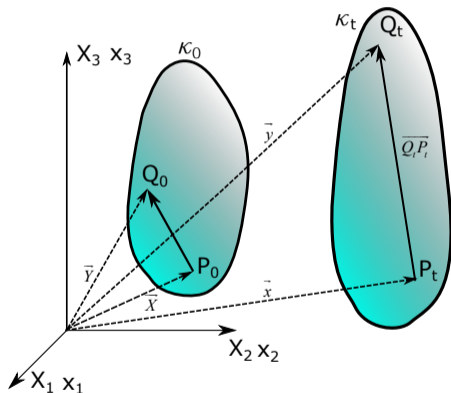
Considérons deux points matériels  $P$  et  $Q$  de positions  $P_0, Q_0$  dans  $\kappa_0$  et  $P_t, Q_t$  dans  $\kappa_t$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{P_t Q_t}$  s'écrit :

$$\overrightarrow{P_t Q_t} = \vec{y} - \vec{x} = \phi(\vec{Y}, t) - \phi(\vec{X}, t)$$

Par développement limité au premier ordre :

$$\overrightarrow{P_t Q_t} = \overline{\overline{F}}(\overrightarrow{OP_0}, t) \cdot \overrightarrow{P_0 Q_0} + \alpha \|\overrightarrow{P_0 Q_0}\|$$



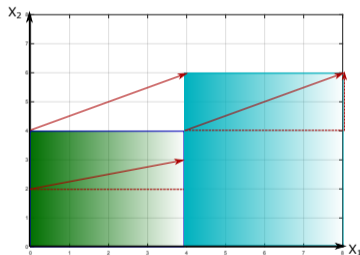
Pour  $P_0$  et  $Q_0$  infiniment proches ( $d\vec{X} = \overrightarrow{P_0 Q_0}$ ) :

$$\vec{x} = \phi(\vec{X}, t), \quad d\vec{x} = \frac{\partial \phi}{\partial \vec{X}} d\vec{X}$$

**Tenseur gradient de la transformation**

$$\overline{\overline{F}}(\vec{X}, t) = \overrightarrow{\text{grad}} [\phi(\vec{X}, t)], \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

$$d\vec{x} = \overline{\overline{F}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X}$$



Translation de 4 unités selon  $x_1$  puis glissement simple :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 4 \\ x_2 = \frac{3}{2}X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Tenseur gradient de la transformation :

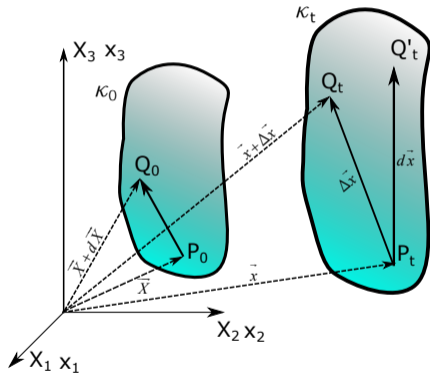
$$\overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La translation n'intervient **pas** dans  $\overline{\overline{F}}$  (mouvement rigide).

Si le tenseur  $\overline{\overline{F}}$  ne dépend pas du point matériel  $P_0$ , la transformation est dite **homogène** :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) = \overline{\overline{F}}(t)\vec{X} + \vec{B}(t)$$

Le passage de la configuration initiale à la configuration à l'instant  $t$  est décrit par une application affine dont  $\overline{\overline{F}}(t)$  est la partie linéaire et  $\vec{B}(t)$  la translation.

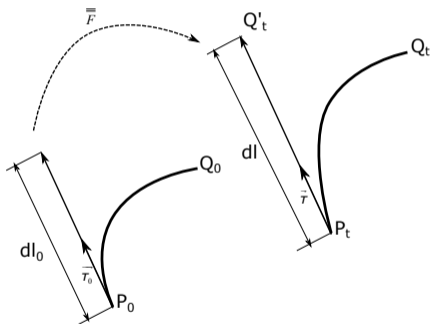


Le vecteur  $\overrightarrow{P_t Q'_t} = \overline{F}(\overrightarrow{OP_0}, t) \overrightarrow{P_0 Q_0}$  est une bonne approximation de  $\overrightarrow{P_t Q_t}$  uniquement si  $Q_0$  est proche de  $P_0$ .

En notant  $\overrightarrow{P_0 Q_0} = d\vec{X}$  et  $\overrightarrow{P_t Q'_t} = d'\vec{X}$  :

$$\Delta\vec{x} = d'\vec{x} + \vec{\alpha}(d\vec{X}) \|d\vec{X}\|$$

Confondre  $\overrightarrow{P_t Q_t}$  avec  $\overrightarrow{P_t Q'_t}$  revient à approcher  $\Delta\vec{x}$  par  $d'\vec{x}$ .



Un arc de courbe  $L_0$  passant par  $P_0$  et  $Q_0$  dans  $\kappa_0$  se transforme en  $L_t$  dans  $\kappa_t$ .

On introduit les vecteurs unitaires  $\vec{\tau}_0$  et  $\vec{\tau}$  tels que :

$$d\vec{X} = dl_0 \vec{\tau}_0, \quad d\vec{x} = dl \vec{\tau}$$

## Transport convectif

Comme  $d\vec{x} = \bar{\bar{F}} d\vec{X}$  :

$$\vec{\tau} dl = \bar{\bar{F}} \vec{\tau}_0 dl_0$$

Un vecteur élémentaire  $d\vec{X}$  se transforme en  $d\vec{x} = \bar{\bar{F}} d\vec{X}$ .

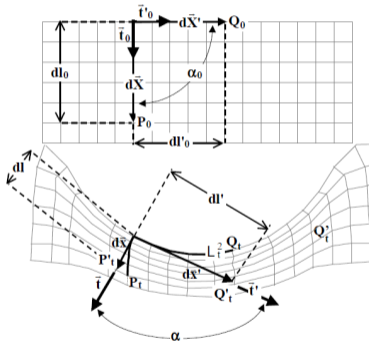
## Section 3

# Tenseur des dilatations

---

- 1 Introduction
- 2 Gradient d'une transformation
- 3
  - Dilatation dans une direction
  - Glissement de deux directions orthogonales
  - Evolution des volumes
  - Décomposition polaire
- 4 Tenseurs des déformations
- 5 Formulation en fonction des déplacements
- 6 Hypothèse des petites déformations

3



Pour comparer longueurs et angles entre  $\kappa_0$  et  $\kappa_t$ , la mesure la plus adéquate est le **produit scalaire** de deux vecteurs élémentaires.

En effet :

- ▶ Le produit scalaire tient compte de l'orientation relative des vecteurs.
- ▶  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  permet d'estimer les **longueurs**.
- ▶  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  permet d'estimer les **angles**.

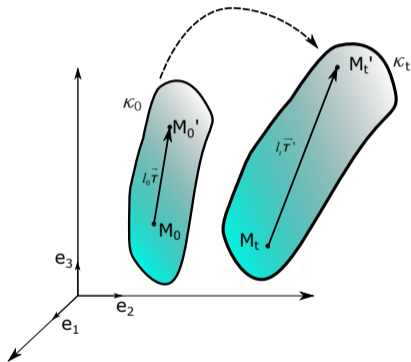
Calculons le produit scalaire de deux vecteurs transformés :

$$d\vec{x}^T \cdot d\vec{x}' = (\overline{\overline{F}} d\vec{X})^T \overline{\overline{F}} d\vec{X}' = d\vec{X}^T \left[ \overline{\overline{F}}^T \overline{\overline{F}} \right] d\vec{X}' = d\vec{X}^T \overline{\overline{C}} d\vec{X}'$$

### Tenseur des dilatations de Cauchy-Green

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^T \overline{\overline{F}}$$

Ce tenseur **lagrangien** dépend de la configuration initiale et permet de calculer le produit scalaire dans  $\kappa_t$  en fonction des vecteurs dans  $\kappa_0$ .

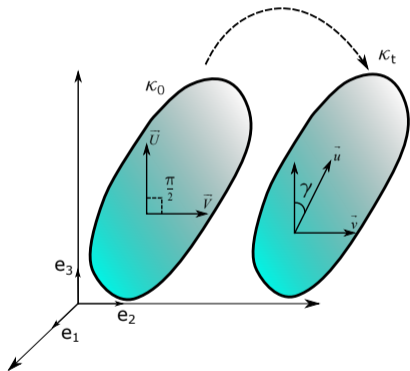


Soit  $\overrightarrow{M_0 M'_0} = l_0 \vec{\tau}$  dans  $\kappa_0$  et son transformé  $\overrightarrow{M_t M'_t}$  de longueur  $l_t$  dans  $\kappa_t$ .

$$l_t = \sqrt{\overrightarrow{M_t M'_t} \cdot \overrightarrow{M_t M'_t}} = l_0 \sqrt{\vec{\tau} \overline{\overline{C}} \vec{\tau}}$$

## Allongement unitaire

$$\lambda(\tau) = \frac{l_t - l_0}{l_0} = \sqrt{\vec{\tau} \overline{\overline{C}} \vec{\tau}} - 1$$

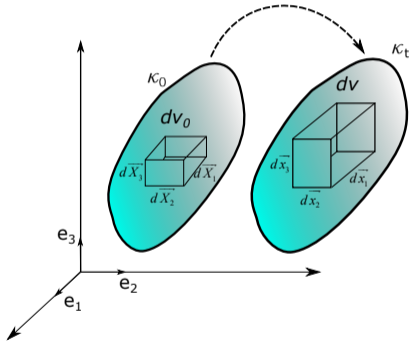


Soit  $\vec{U} = l_0 \vec{\tau}$  et  $\vec{V} = l'_0 \vec{\tau}'$  initialement orthogonales ( $\vec{\tau} \perp \vec{\tau}'$ ) dans  $\kappa_0$ . Leurs images dans  $\kappa_t$  sont  $\vec{u} = \overline{\overline{F}} \vec{U}$  et  $\vec{v} = \overline{\overline{F}} \vec{V}$ .

## Glissement $\gamma$

L'angle entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  vaut  $\frac{\pi}{2} - \gamma$  avec :

$$\sin(\gamma) = \frac{\vec{\tau}' \overline{\overline{C}} \vec{\tau}}{\sqrt{\vec{\tau}' \overline{\overline{C}} \vec{\tau}} \sqrt{\vec{\tau}' \overline{\overline{C}} \vec{\tau}'}}$$



Soit un parallélépipède élémentaire de sommet  $M_0$  construit à partir de  $d\vec{X}_1$ ,  $d\vec{X}_2$ ,  $d\vec{X}_3$ . Son volume algébrique dans  $\kappa_t$  :

$$dv = d\vec{x}_1 \cdot (d\vec{x}_2 \wedge d\vec{x}_3)$$

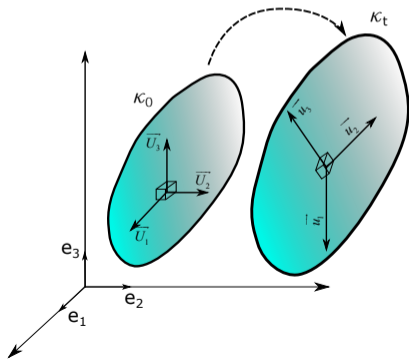
### Conservation du volume

$$\boxed{dv = J dv_0}, \quad J = \det(\bar{\bar{F}}) = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|$$

$J$  est le jacobien de la transformation.

Le tenseur  $\overline{\overline{C}}$  est symétrique défini positif donc diagonalisable. Ses valeurs propres  $C_i = \lambda_i^2 > 0$  et ses vecteurs propres  $\overrightarrow{U}_i$  sont orthogonaux :

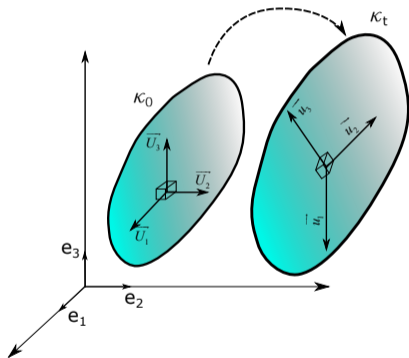
$$\overrightarrow{U}_i \cdot \overrightarrow{U}_j = \delta_{ij}$$



Calcul du produit scalaire des images  $\overrightarrow{u}_i = \overline{\overline{F}}\overrightarrow{U}_i$  :

$$\overrightarrow{u}_i \cdot \overrightarrow{u}_j = \overrightarrow{U}_i \cdot \overline{\overline{C}} \cdot \overrightarrow{U}_j = \lambda_j^2 \delta_{ij}$$

Les directions principales de  $\overline{\overline{C}}$  dans  $\kappa_0$  sont transportées convectivement en directions **orthogonales** dans  $\kappa_t$ .



## Décomposition de $\overline{\overline{F}}$

$\overline{\overline{F}}$  se décompose **de manière unique** en :

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{U}}$$

- ▶  $\overline{\overline{R}}$  : rotation (tenseur orthogonal)

$$\overline{\overline{R}}^T \cdot \overline{\overline{R}} = \overline{\overline{I}}$$

- ▶  $\overline{\overline{U}}$  : déformation pure (symétrique) — “dilatation” des vecteurs propres  $\overline{\overline{U}}_i$

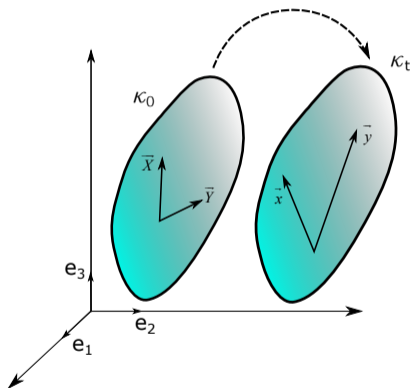
## Section 4

# Tenseurs des déformations

---

- 1 Introduction
- 2 Gradient d'une transformation
- 3 Tenseur des dilatations
- 4 Tenseur de Green-Lagrange
- 5 Formulation en fonction des déplacements
- 6 Hypothèse des petites déformations
- 7 Hypothèse des petites transformations

4



La différence des produits scalaires mesure la déformation :

$$(\vec{x} \cdot \vec{y}) - (\vec{X} \cdot \vec{Y}) = \vec{X} \cdot (\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}) \cdot \vec{Y}$$

**Tenseur de déformation de Green-Lagrange**

$$\bar{\bar{L}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}) = \frac{1}{2}(\bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}})$$

Pour un mouvement rigide ( $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{R}}$ ) :  $\bar{\bar{L}} = \bar{\bar{0}}$  — la déformation est nulle. ✓

## Allongement unitaire

$$\lambda(\vec{\tau}) = \sqrt{\bar{\bar{I}} + 2\vec{\tau} \cdot \bar{\bar{L}} \cdot \vec{\tau}} - 1$$

## Glissement

$$\sin(\gamma) = \frac{2\vec{\tau}' \cdot \bar{\bar{L}} \cdot \vec{\tau}}{\sqrt{1 + 2\vec{\tau} \cdot \bar{\bar{L}} \cdot \vec{\tau}} \sqrt{1 + 2\vec{\tau}' \cdot \bar{\bar{L}} \cdot \vec{\tau}'}}$$

Pourquoi  $\bar{\bar{L}}$  plutôt que  $\bar{\bar{C}}$  ?

En absence de dilatation (mouvement rigide) :  $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{R}}$  d'où  $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{R}}^T \bar{\bar{R}} = \bar{\bar{I}} \neq \bar{\bar{0}}$ .

En revanche  $\bar{\bar{L}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{I}} - \bar{\bar{I}}) = \bar{\bar{0}}$  — déformation nulle ✓

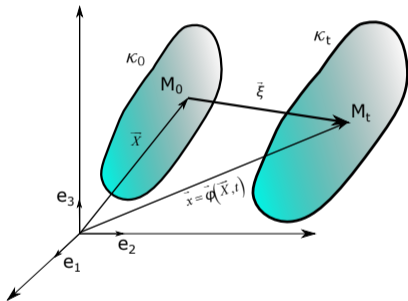
## Section 5

# Formulation en fonction des déplacements

---

- 1 Introduction
- 2 Gradient d'une transformation
- 3 Tenseur des dilatations
- 4 Tenseurs des déformations
- 5
- 6 Hypothèse des petites déformations
- 7 Hypothèse des petites transformations

5



Le **déplacement** de la particule  $M$  est :

$$\vec{\xi}(\vec{X}, t) = \overrightarrow{M_0 M_t} = \vec{x} - \vec{X}$$

C'est un **champ** de vecteurs défini sur  $\kappa_0$ .

Comme  $\vec{\phi} = \vec{x} = \vec{\xi} + \vec{X}$  et  $\bar{\bar{F}} = \overline{\nabla \phi}$  :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{I}} + \overline{\nabla \bar{\xi}}$$

## Tenseur de dilatation de Cauchy-Green

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T \bar{\bar{F}} = \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\nabla}}\xi + \bar{\bar{\nabla}}\xi^T + \bar{\bar{\nabla}}\xi^T \bar{\bar{\nabla}}\xi$$

## Tenseur de déformation de Green-Lagrange

$$\bar{\bar{L}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{I}}) = \frac{1}{2}(\bar{\bar{\nabla}}\xi + \bar{\bar{\nabla}}\xi^T + \bar{\bar{\nabla}}\xi^T \bar{\bar{\nabla}}\xi)$$

## Section 6

# Hypothèse des petites déformations

---

- 1 Introduction
- 2 Gradient d'une transformation
- 3 Tenseur des dilatations
- 4 Tenseurs des déformations
- 5 Formulation en fonction des déplacements
- 6
- 7 Hypothèse des petites transformations

6

On dit que les déformations entre 0 et  $t$  sont **petites** en  $M_0$  si les valeurs propres  $l_i$  du tenseur  $\bar{\bar{L}}$  vérifient  $l_i \ll 1$ .

On montre alors que :

$$l_i = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1) \Leftrightarrow \lambda_i = (2l_i + 1)^{1/2} \simeq l_i + 1$$

Allongement unitaire

$$\lambda(\vec{\tau}) \simeq \vec{\tau} \cdot \bar{\bar{L}} \cdot \vec{\tau}$$

Évolution des volumes

$$J \simeq 1 + \text{tr}(\bar{\bar{L}})$$

## Section 7

# Hypothèse des petites transformations

---

- 1 Introduction
- 2 Gradient d'une transformation
- 3 Tenseur des dilatations
- 4 Tenseurs des déformations
- 5 Formulation en fonction des déplacements
- 6 Hypothèse des petites déformations

7

7

Les transformations entre 0 et  $t$  sont **petites** en  $M_0$  si toutes les composantes de  $\overline{\overline{\nabla}}_{\xi}(\vec{X}, t)$  sont petites devant 1 :

$$\|\overline{\overline{\nabla}}_{\xi}(\vec{X}, t)\| \ll 1, \quad \forall M_0 \in \kappa_0$$

### Conséquences (linéarisation)

- ▶ Les valeurs propres de  $\overline{\overline{L}}$  sont également petites. L'HPT implique l'HPD (la réciproque n'est pas toujours vraie).
- ▶ On néglige les termes quadratiques  $\overline{\overline{\nabla}}_{\xi}^T \overline{\overline{\nabla}}_{\xi}$  :

$$\overline{\overline{L}} \simeq \overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \overline{\overline{\nabla}}_{\xi} + \overline{\overline{\nabla}}_{\xi}^T \right)$$

$\overline{\overline{\varepsilon}}$  est le **tenseur symétrique de déformation linéarisé**.

## Tenseur antisymétrique de rotation

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \left( \overline{\nabla \xi} - \overline{\nabla \xi}^T \right)$$

Tenseur  $\bar{U}$ 

$$\bar{U} \approx \bar{I} + \bar{\varepsilon}$$

## Allongement unitaire

$$\lambda(\vec{r}) \approx \vec{r} \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \vec{r}$$

## Évolution des volumes

$$J \approx 1 + \text{tr}(\bar{\varepsilon}) \simeq 1 + \text{div}(\vec{\xi})$$

## Section 8

# Conditions de compatibilité

---

- 1 Introduction
- 2 Gradient d'une transformation
- 3 Tenseur des dilatations
- 4 Tenseurs des déformations
- 5 Formulation en fonction des déplacements
- 6 Hypothèse des petites déformations
- 7 Hypothèse des petites transformations



Un champ de déformation doit remplir certaines conditions pour correspondre à un champ de déplacements **continu**.

### Analogie du puzzle

Si l'on déforme les pièces d'un puzzle de façon indépendante, rien ne garantit qu'on puisse les juxtaposer après déformation sans plis ni vides. Le champ de déformation doit donc être **compatible**.

Si l'on connaît  $\vec{\xi}$ , il est simple de calculer  $\bar{\varepsilon}$  :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i} \right)$$

L'inverse n'est pas vrai : un champ de déformation quelconque n'est pas forcément intégrable sous forme d'un champ de déplacements continu.

## Condition générale

$$2 \left( \overline{\text{grad}} \left( \overline{\text{div}} \vec{\bar{\varepsilon}} \right) \right) - \Delta \bar{\varepsilon} - \overline{\text{grad}} \left( \overline{\text{grad}} \left( \text{tr} \bar{\varepsilon} \right) \right) = \vec{0}$$

## Les 6 relations indépendantes

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial X_3} - \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial X_1} \right\}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_2} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial X_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_3} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial X_3} \right\}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2}, \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2}, \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial X_3 \partial X_1} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_3^2}$$

# Merci de votre attention !

---

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

MMC