

COURS PÉDAGOGIQUE

# MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

*Chapitre IX : Problèmes d'élasticité*

**Mr. ZENNADI Karim**

Enseignant Chercheur — ENP

18 mai 2026

- ① Équations constitutives
  - Introduction
  - Les cinq équations
  - Fermeture du problème
- ② Résolution analytique
- ③ Théorème de superposition
- ④ Problèmes plans
  - Déformations planes
  - Contraintes planes

## Section 1

# Équations constitutives

---

1

Introduction  
Les cinq équations  
Fermeture du problème

2

Résolution analytique

3

Théorème de superposition

4

Problèmes plans

1

Depuis le début du cours de **MMC**, on a introduit plusieurs équations de différents types, faisant intervenir différentes grandeurs physiques. On les récapitule ici pour formuler de manière rigoureuse un **problème d'élasticité linéaire isotrope**.

### Types d'équations

- ▶ Équations **cinématiques**
- ▶ Équations d'**équilibre**
- ▶ Équations de **comportement**

### Domaines d'application

- ▶ Équations de **volume** (sur  $D$ )
- ▶ Équations de **surface** (sur  $S$ )

### Hypothèses fondamentales

Élasticité linéaire isotrope + Hypothèse des Petites Perturbations (HPP) :  
 $D$  et  $S$  sont supposés quasi-indépendants du temps.

Éq. 1 — Compatibilité déformation–déplacement (sur  $D$ )

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \overline{\overline{\text{grad}}} \overrightarrow{U} + \overline{\overline{\text{grad}}}^T \overrightarrow{U} \right)$$

Valable en tout point du domaine  $D$ .

Éq. 2 — Condition aux limites en déplacement (sur  $S_U$ )

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U_D} \quad \text{sur } S_U$$

$S_U \subset S$  : partie de la surface extérieure où un déplacement  $\overrightarrow{U_D}$  est imposé. Le champ de déplacement doit être compatible avec ces valeurs aux limites.

Éq. 3 — PFD local — Équilibre statique (sur  $D$ )

$$\overline{\text{div}}(\overline{\sigma}) + \overline{g} = \overline{0} \quad \text{sur } D$$

Représente l'équilibre **après** chargement et déformation (terme d'accélération nul). Pour la dynamique, il faudrait ajouter  $\rho \overline{\gamma}$ .

Éq. 4 — Condition aux limites en contraintes (sur  $S_T$ )

$$\overline{\sigma} \cdot \overline{n} = \overline{T}_D \quad \text{sur } S_T$$

$S_T \subset S$  : partie de  $S$  où une contrainte surfacique  $\overline{T}_D$  est imposée.

Éq. 5 — Loi de Hooke (sur  $D$ )

$$\bar{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{I} + 2\mu \bar{\varepsilon} \quad \text{sur } D$$

Il s'agit ici de l'élasticité linéaire isotrope. Pour d'autres types de matériaux (viscoplasticité, endommagement, etc.) cette équation serait remplacée par une autre relation contraintes–déformations.

## Les cinq équations du problème élastique

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} (\overline{\text{grad}} \vec{U} + {}^T \overline{\text{grad}} \vec{U}) && \text{sur } D \\ \overline{\text{div}}(\bar{\bar{\sigma}}) + \vec{g} &= \vec{0} && \text{sur } D \\ \bar{\bar{\sigma}} &= \lambda \text{tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) \bar{\bar{I}} + 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}} && \text{sur } D \\ \vec{U} &= \vec{U}_D && \text{sur } S_U \\ \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} &= \vec{T}_D && \text{sur } S_T \end{aligned}$$

Inconnues (à déterminer sur  $D$  et  $S$ )

$$\bar{\bar{\sigma}}, \bar{\bar{\varepsilon}}, \vec{U}$$

Données

Géométrie de  $D$  et  $S$ ,  $\vec{U}_D$  sur  $S_U$ ,  $\vec{T}_D$  sur  $S_T$

D'après le **théorème fondamental de l'élasticité**, le système des cinq équations admet **une et une seule solution**  $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}, \bar{U})$  si et seulement si :

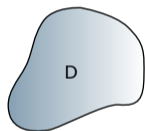
### Conditions de fermeture

$$\boxed{S_U \cap S_T = \emptyset} \quad \text{et} \quad \boxed{S_U \cup S_T = S}$$

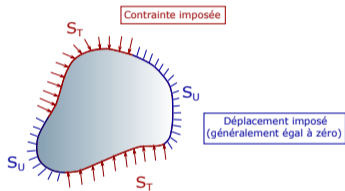
### Interprétation

- ▶  $S_U \cap S_T = \emptyset$  : un point de  $S$  ne peut pas recevoir *simultanément* une condition en déplacement *et* en contrainte.
- ▶  $S_U \cup S_T = S$  : tout point de  $S$  doit recevoir *au moins* une condition aux limites.

Un problème vérifiant ces deux conditions est dit **bien posé**.



Géométrie



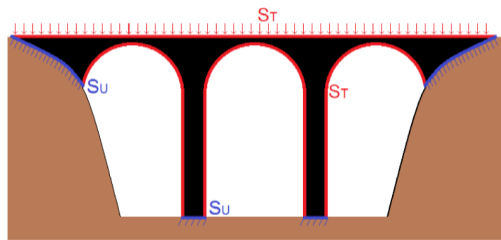
Conditions aux limites

## Partition de la surface extérieure

La surface extérieure  $S$  est décomposée en deux parties complémentaires et disjointes :

- ▶  $S_U$  : conditions aux limites en **déplacement**
- ▶  $S_T$  : conditions aux limites en **contrainte**

$$S_U \cap S_T = \emptyset, \quad S_U \cup S_T = S$$



### Modélisation élastique

- ▶  $S_U$  : surfaces d'appui (déplacements imposés nuls ou connus)
- ▶  $S_T$  : surfaces libres ou chargées (forces surfaciques imposées)
- ▶  $D$  : volume du viaduc (poids propre  $\vec{g}$ , charges)

## Section 2

# Résolution analytique

---

- 1 Équations constitutives
- 2
- 3 Théorème de superposition
- 4 Problèmes plans

2

Le problème élastique comporte **trois champs inconnus**  $(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}, \vec{U})$ . Une bonne stratégie consiste à **réduire ce nombre** en exploitant deux des cinq équations fondamentales :

### Chaîne de substitution

1. L'équation de compatibilité donne  $\bar{\varepsilon}$  en fonction de  $\vec{U}$
2. La loi de Hooke donne  $\bar{\sigma}$  en fonction de  $\bar{\varepsilon}$ , donc de  $\vec{U}$

Si  $\vec{U}$  est connu  $\Rightarrow$  tout est connu. Inversement, si  $\bar{\sigma}$  est connu, on peut remonter à  $\bar{\varepsilon}$  et  $\vec{U}$ .

On peut donc ramener le problème à **une seule inconnue** : soit  $\vec{U}$  (approche en déplacements), soit  $\bar{\sigma}$  (approche en contraintes).

## Étape 1 — Postuler un champ de contraintes vérifiant

- ▶ PFD local :  $\overrightarrow{\text{div}}(\overline{\overline{\sigma}}) + \overrightarrow{g} = \overline{\overline{0}}$  sur  $D$
- ▶ CL en contraintes :  $\overline{\overline{\sigma}} \cdot \overrightarrow{n} = \overline{\overline{T}}_D$  sur  $S_T$

## Étape 2 — Vérifier l'équation de Beltrami

$$\Delta \overline{\overline{\sigma}} + \frac{1}{1+\nu} \overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{\text{grad}} [\text{tr}(\overline{\overline{\sigma}})] = \overline{\overline{0}}$$

Cette équation traduit les **conditions de compatibilité des déformations** exprimées en contraintes. Si elle est satisfaite, le champ postulé est **la solution unique** du problème.

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} \left( \overline{\overline{\text{grad} \vec{U}}} + {}^T \overline{\overline{\text{grad} \vec{U}}} \right) \text{ sur } D \\ \overline{\overline{\sigma}} &= \lambda \text{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}}) \overline{\overline{\mathbf{I}}} + 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}} \text{ sur } D \\ \overline{\overline{\text{div} \sigma}} + \overline{\overline{\mathbf{g}}} &= \overline{\overline{\mathbf{0}}} \text{ sur } D \end{aligned}$$

### Substitution en chaîne

En injectant la loi de Hooke puis la compatibilité dans le PFD local, on élimine  $\overline{\overline{\sigma}}$  et  $\overline{\overline{\varepsilon}}$ .

### Formule de Navier

$$\mu \overline{\overline{\Delta}} \vec{U} + (\lambda + \mu) \overline{\overline{\text{grad}}}(\text{div} \vec{U}) + \overline{\overline{\mathbf{g}}} = \overline{\overline{\mathbf{0}}}$$

Une seule inconnue vectorielle  $\vec{U}$  sur  $D$ , à résoudre avec :

$$\vec{U} = \vec{U}_D \text{ sur } S_U, \quad \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{T}_D \text{ sur } S_T$$

## Section 3

# Théorème de superposition

---

- 1 Équations constitutives
- 2 Résolution analytique
- 3
- 4 Problèmes plans

3

Soient deux problèmes élastiques « élémentaires » définis sur le même domaine  $D$  avec les mêmes partitions  $S_U$  et  $S_T$ , de solutions respectives  $(\overline{\sigma}_1, \overline{\varepsilon}_1, \overline{U}_1)$  et  $(\overline{\sigma}_2, \overline{\varepsilon}_2, \overline{U}_2)$ .

### Théorème

Pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , le problème défini par les conditions aux limites

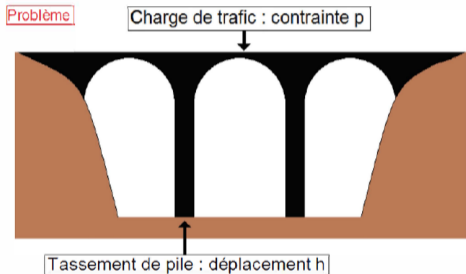
$$\overline{U} = \alpha \overline{U}_{D1} + \beta \overline{U}_{D2} \text{ sur } S_U, \quad \overline{\sigma} \cdot \vec{n} = \alpha \overline{T}_{D1} + \beta \overline{T}_{D2} \text{ sur } S_T$$

admet pour solution unique :

$$\overline{\sigma} = \alpha \overline{\sigma}_1 + \beta \overline{\sigma}_2, \quad \overline{\varepsilon} = \alpha \overline{\varepsilon}_1 + \beta \overline{\varepsilon}_2, \quad \overline{U} = \alpha \overline{U}_1 + \beta \overline{U}_2$$

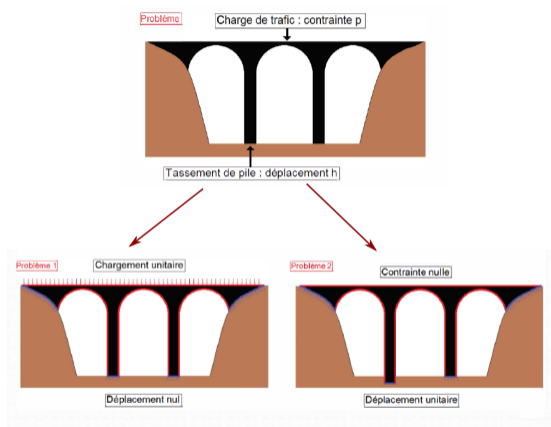
### Conséquence pratique

Si l'on **additionne des sollicitations**, on **additionne leurs effets**. Si l'on **multiplie une sollicitation** par un scalaire, on multiplie ses effets par la même quantité.

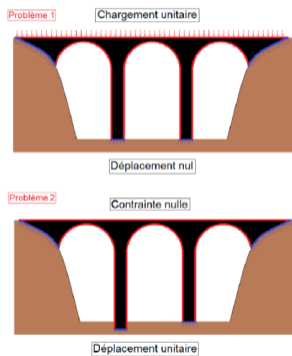


Un viaduc est soumis à un chargement combiné (poids propre + charges roulantes). On cherche les champs de contraintes, déformations et déplacements résultants.

Au lieu de traiter ce problème dans son ensemble (complexe), on le **décompose** en sous-problèmes élémentaires plus simples à résoudre.



Le problème complexe est divisé en **deux sous-problèmes élémentaires**, chacun traitable séparément.



### Solution composée

Une fois les deux sous-problèmes résolus (chargements  $p$  et  $h$ ) :

$$\bar{\varepsilon} = p \bar{\varepsilon}_1 + h \bar{\varepsilon}_2$$

$$\bar{\sigma} = p \bar{\sigma}_1 + h \bar{\sigma}_2$$

$$\vec{U} = p \vec{U}_1 + h \vec{U}_2$$

Cette méthode est également à la base de la plupart des **méthodes numériques** (éléments finis, etc.).

## Section 4

# Problèmes plans

---

- 1 Équations constitutives
- 2 Résolution analytique
- 3 Théorème de superposition
- 4 **Déformations planes**  
Contraintes planes

4

## Mouvement plan

$$U_3 = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = \frac{\partial U_2}{\partial x_3} = 0$$

## Tenseur des déformations

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

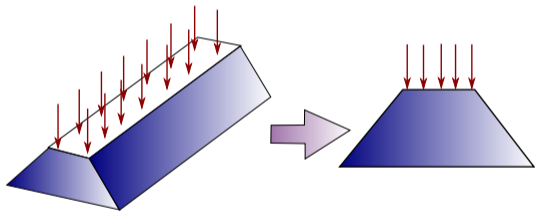
## Tenseur des contraintes (Hooke)

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \lambda I_\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{11} & 2\mu\varepsilon_{12} & 0 \\ 2\mu\varepsilon_{12} & \lambda I_\varepsilon + 2\mu\varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda I_\varepsilon \end{pmatrix}$$

avec  $I_\varepsilon = \text{tr}(\bar{\bar{\varepsilon}})$ .

## Remarque importante

Bien que  $\varepsilon_{33} = 0$ , on a  $\sigma_{33} = \lambda I_\varepsilon \neq 0$  : une **contrainte hors-plan** se développe par **effet Poisson** (la déformation est bloquée dans cette direction).



### Structures typiques

Cet état se rencontre dans les **structures allongées dans une direction** et identiques à elles-mêmes dans cette direction (géométrie et chargement) :

- ▶ Barrage-poids (section constante)
- ▶ Tunnel (coupe transversale)
- ▶ Remblai de grande longueur

On peut alors réduire le problème 3D à une **analyse 2D** dans le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

## Tenseur des contraintes

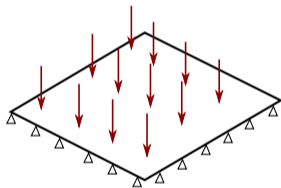
$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Tenseur des déformations (Hooke inverse)

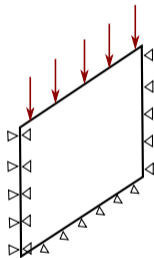
$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{pmatrix}$$

## Remarque

Bien que  $\sigma_{33} = 0$ , on a  $\varepsilon_{33} \neq 0$  : une **déformation hors-plan** apparaît par **effet Poisson**. Un état de contraintes planes n'induit donc *pas* un état de déformations planes.



Plaques  
Contraintes quelconques



Coques  
Contraintes planes

## Structure typique : la coque

Les contraintes planes apparaissent dans les **structures minces chargées uniquement dans leur plan**. On parle de **coque** (ou membrane).

## Coque $\neq$ Plaque

- ▶ **Coque** : géométrie mince, chargement *dans* le plan  $\Rightarrow$  contraintes planes
- ▶ **Plaque** : géométrie mince, chargement *perpendiculaire* au plan  $\Rightarrow$  flexion

# Merci de votre attention !

---

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

MMC