

COURS PEDAGOGIQUE

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Chapitre I : Éléments de Calcul Tensoriel

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

17 mai 2026

Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Vecteurs et tenseurs
 - Vecteur
 - Application linéaire de ξ dans ξ
 - Formes bilinéaires
 - Tenseurs
 - Changement de repère
- 3 Permutations et déterminants
 - Symbole de Levi-Civita
 - Déterminant d'une matrice
 - Adjoint d'un tenseur antisymétrique
- 4 Calcul vectoriel et analyse vectorielle
 - Calcul vectoriel
 - Analyse vectorielle
 - Transformation d'intégrales
- 5 Formules essentielles en MMC
 - Coordonnées cartésiennes
 - Coordonnées cylindriques
 - Coordonnées sphériques

Section 1

Introduction

- 1
- 2 Vecteurs et tenseurs
- 3 Permutations et déterminants
- 4 Calcul vectoriel et analyse vectorielle
- 5 Formules essentielles en MMC

1

Un tenseur est une entité algébrique avec des composantes variées qui généralise le concept de **scalaire**, **vecteur** et **matrice**.

Un tenseur est une entité algébrique avec des composantes variées qui généralise le concept de **scalaire**, **vecteur** et **matrice**.

- ▶ Beaucoup de quantités physiques sont mathématiquement représentées comme tenseurs.

Un tenseur est une entité algébrique avec des composantes variées qui généralise le concept de **scalaire**, **vecteur** et **matrice**.

- ▶ Beaucoup de quantités physiques sont mathématiquement représentées comme tenseurs.
- ▶ Les tenseurs sont indépendants de tout système de référence mais sont représentés par les composantes de leurs matrices dans un repère donné.

Un tenseur est une entité algébrique avec des composantes variées qui généralise le concept de **scalaire**, **vecteur** et **matrice**.

- ▶ Beaucoup de quantités physiques sont mathématiquement représentées comme tenseurs.
- ▶ Les tenseurs sont indépendants de tout système de référence mais sont représentés par les composantes de leurs matrices dans un repère donné.
- ▶ Les composantes d'un tenseur dépendent du système de référence choisi et varient avec lui.



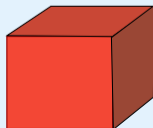
Scalaire

 ρ, θ, \dots 

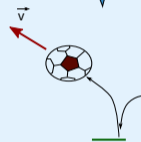
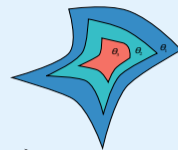
Vecteur

 \vec{v}, \vec{f}, \dots 

Matrice

 $\vec{\sigma}, \vec{\varepsilon}, \dots$ 

?

 \mathfrak{R}, \dots 

L'ordre d'un tenseur est donné par le nombre d'indices dont on a besoin.

L'ordre d'un tenseur est donné par le nombre d'indices dont on a besoin.

► **Scalaire** : ordre 0 $\alpha = 3,14$

L'ordre d'un tenseur est donné par le nombre d'indices dont on a besoin.

► **Scalaire** : ordre 0 $\alpha = 3,14$

► **Vecteur** : ordre 1 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,3 \\ 0,8 \end{pmatrix}$

L'ordre d'un tenseur est donné par le nombre d'indices dont on a besoin.

► **Scalaire** : ordre 0 $\alpha = 3,14$

► **Vecteur** : ordre 1 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,3 \\ 0,8 \end{pmatrix}$

► **Matrice** : ordre 2 $\bar{\bar{E}} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 1,3 \\ 1,6 & 2,4 & 0,5 \\ 0 & 0,4 & 5,8 \end{pmatrix}$

L'ordre d'un tenseur est donné par le nombre d'indices dont on a besoin.

► **Scalaire** : ordre 0 $\alpha = 3,14$

► **Vecteur** : ordre 1 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,3 \\ 0,8 \end{pmatrix}$

► **Matrice** : ordre 2 $\bar{\bar{E}} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 1,3 \\ 1,6 & 2,4 & 0,5 \\ 0 & 0,4 & 5,8 \end{pmatrix}$

► Ordre 3 : 3 dimensions, ...

La mécanique des milieux continus fait un usage intensif des **champs scalaires, vectoriels et tensoriels**.

La mécanique des milieux continus fait un usage intensif des **champs scalaires, vectoriels et tensoriels**.

Ces outils mathématiques indispensables permettent d'établir des résultats fondamentaux, en conférant aux formules une concision remarquable.

La mécanique des milieux continus fait un usage intensif des **champs scalaires, vectoriels et tensoriels**.

Ces outils mathématiques indispensables permettent d'établir des résultats fondamentaux, en conférant aux formules une concision remarquable.

Les **scalaires, vecteurs et tenseurs** sont invariants lors d'un changement de base.

La mécanique des milieux continus fait un usage intensif des **champs scalaires, vectoriels et tensoriels**.

Ces outils mathématiques indispensables permettent d'établir des résultats fondamentaux, en conférant aux formules une concision remarquable.

Les **scalaires, vecteurs et tenseurs** sont invariants lors d'un changement de base. On peut ainsi écrire les équations de la mécanique de manière **intrinsèque**, indépendamment de la base choisie.

Dans ce cours, nous n'utiliserons que des systèmes de coordonnées **orthogonales**, éventuellement curvilignes.

Dans ce cours, nous n'utiliserons que des systèmes de coordonnées **orthogonales**, éventuellement curvilignes.

Ce qui permet des simplifications considérables sans introduire de restrictions trop gênantes.

Dans ce cours, nous n'utiliserons que des systèmes de coordonnées **orthogonales**, éventuellement curvilignes.

Ce qui permet des simplifications considérables sans introduire de restrictions trop gênantes.

Tous les vecteurs et tenseurs considérés seront à **composantes réelles**.

Section 2

Vecteurs et tenseurs

① Introduction

②

Vecteur

Application linéaire de ξ dans ξ

Formes bilinéaires

Tenseurs

Changement de repère

③ Permutations et déterminants

④ Calcul vectoriel et analyse vectorielle

⑤ Formules essentielles en MMC

2

Dans un espace euclidien ξ à trois dimensions, soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée. Un vecteur \vec{V} est représenté par ses composantes V_1, V_2, V_3 :

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 V_i \vec{e}_i$$

Dans un espace euclidien ξ à trois dimensions, soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée. Un vecteur \vec{V} est représenté par ses composantes V_1, V_2, V_3 :

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 V_i \vec{e}_i$$

Avec la **convention d'Einstein** (sommation sur l'indice répété) :

$$\vec{V} = V_i \vec{e}_i$$

L'indice i est dit **indice muet**.

En notation matricielle :

$$\vec{V} = \{\vec{V}\} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

En notation matricielle :

$$\vec{V} = \{\vec{V}\} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

Le vecteur transposé :

$$\vec{V}^T = \{\vec{V}\}^T = \langle \vec{V} \rangle = \langle V_1 \quad V_2 \quad V_3 \rangle$$

Soit A une application linéaire. Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, elle est représentée par une matrice 3×3 notée $[A]$:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Soit A une application linéaire. Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, elle est représentée par une matrice 3×3 notée $[A]$:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Si $\vec{W} = A\vec{V}$, alors :

$$W_1 = A_{11} V_1 + A_{12} V_2 + A_{13} V_3$$

$$W_2 = A_{21} V_1 + A_{22} V_2 + A_{23} V_3$$

$$W_3 = A_{31} V_1 + A_{32} V_2 + A_{33} V_3$$

En notation indicielle (j indice muet, i indice **franc**) :

$$W_i = A_{ij} V_j$$

En notation indicielle (j indice muet, i indice **franc**) :

$$W_i = A_{ij} V_j$$

En notation matricielle :

$$\{W\} = [A]\{V\}$$

Le **symbole de Kronecker** est défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Le **symbole de Kronecker** est défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

L'application identité \bar{I} est représentée par :

$$[\bar{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad l_{ij} = \delta_{ij}$$

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriétés

► $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriétés

- ▶ $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$
- ▶ $\delta_{im}a_m = a_i$

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriétés

- ▶ $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$
- ▶ $\delta_{im} a_m = a_i$
- ▶ $\delta_{im} T_{mj} = T_{ij}$

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriétés

- ▶ $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$
- ▶ $\delta_{im} a_m = a_i$
- ▶ $\delta_{im} T_{mj} = T_{ij}$
- ▶ $\delta_{im} \delta_{mj} = \delta_{ij}$

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriétés

- ▶ $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$
- ▶ $\delta_{im} a_m = a_i$
- ▶ $\delta_{im} T_{mj} = T_{ij}$
- ▶ $\delta_{im} \delta_{mj} = \delta_{ij}$
- ▶ Pour un repère orthonormé : $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

La composition de deux applications linéaires se traduit par le produit de leurs matrices :

$$C = A \circ B \implies [C] = [A][B]$$

La composition de deux applications linéaires se traduit par le produit de leurs matrices :

$$C = A \circ B \implies [C] = [A][B]$$

En notation indicielle :

$$C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

Soit A une forme bilinéaire sur ξ (application bilinéaire de $\xi \times \xi$ dans \mathbb{R}). Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$A(\vec{V}, \vec{W}) = A_{ij} V_i W_j$$

Soit A une forme bilinéaire sur ξ (application bilinéaire de $\xi \times \xi$ dans \mathbb{R}). Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$A(\vec{V}, \vec{W}) = A_{ij} V_i W_j$$

En notation matricielle :

$$A(\vec{V}, \vec{W}) = \langle V \rangle [A] \{ W \}$$

Soit A une forme bilinéaire sur ξ (application bilinéaire de $\xi \times \xi$ dans \mathbb{R}). Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$A(\vec{V}, \vec{W}) = A_{ij} V_i W_j$$

En notation matricielle :

$$A(\vec{V}, \vec{W}) = \langle V \rangle [A] \{ W \}$$

Le symbole de Kronecker représente le **produit scalaire** dans toute base orthonormée :

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs :

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = V_i \vec{e}_i \cdot W_j \vec{e}_j = V_i W_j \delta_{ij} = V_i W_i$$

Le produit scalaire de deux vecteurs :

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = V_i \vec{e}_i \cdot W_j \vec{e}_j = V_i W_j \delta_{ij} = V_i W_i$$

En notation matricielle :

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \langle V \rangle \{ W \}$$

Un **tenseur du second ordre** T est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur \vec{V} un vecteur \vec{W} :

$$\vec{W} = T(\vec{V})$$

Un **tenseur du second ordre** T est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur \vec{V} un vecteur \vec{W} :

$$\vec{W} = T(\vec{V})$$

Il est représenté par une matrice 3×3 notée $[T]$ ou $\overline{\overline{T}}$:

$$W_i = T_{ij} V_j$$

Un **tenseur du second ordre** T est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur \vec{V} un vecteur \vec{W} :

$$\vec{W} = T(\vec{V})$$

Il est représenté par une matrice 3×3 notée $[T]$ ou $\overline{\overline{T}}$:

$$W_i = T_{ij} V_j$$

En notation matricielle :

$$\{\vec{W}\} = [\overline{\overline{T}}] \{\vec{V}\} \quad \text{ou} \quad \vec{W} = \overline{\overline{T}} \vec{V}$$

Propriétés

- ▶ **Symétrique** si $T_{ij} = T_{ji}$

Propriétés

- ▶ **Symétrique** si $T_{ij} = T_{ji}$
- ▶ **Antisymétrique** si $T_{ij} = -T_{ji}$

Propriétés

- ▶ **Symétrique** si $T_{ij} = T_{ji}$
- ▶ **Antisymétrique** si $T_{ij} = -T_{ji}$
- ▶ **Isotrope** si $T_{ij} = t \delta_{ij}$

Propriétés

- ▶ **Symétrique** si $T_{ij} = T_{ji}$
- ▶ **Antisymétrique** si $T_{ij} = -T_{ji}$
- ▶ **Isotrope** si $T_{ij} = t \delta_{ij}$
- ▶ Tout tenseur se décompose en partie symétrique et antisymétrique :

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}^{\text{sym}} + \overline{\overline{A}}^{\text{asym}}$$

$$\overline{\overline{A}}^{\text{sym}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{A}}^T \right), \quad \overline{\overline{A}}^{\text{asym}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{A}} - \overline{\overline{A}}^T \right)$$

Le **produit tensoriel** $\vec{U} \otimes \vec{V}$ est le tenseur d'ordre deux défini par la forme bilinéaire :

$$(\vec{U} \otimes \vec{V})(\vec{X}, \vec{Y}) = (\vec{U} \cdot \vec{X})(\vec{V} \cdot \vec{Y})$$

Le **produit tensoriel** $\vec{U} \otimes \vec{V}$ est le tenseur d'ordre deux défini par la forme bilinéaire :

$$(\vec{U} \otimes \vec{V})(\vec{X}, \vec{Y}) = (\vec{U} \cdot \vec{X})(\vec{V} \cdot \vec{Y})$$

Les 9 produits $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ forment une base de l'espace des tenseurs d'ordre deux :

$$\overline{\overline{T}} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ deux bases orthonormées. La matrice de passage Q est définie par :

$$\vec{e}'_i = Q_{ij} \vec{e}_j \quad \text{ou} \quad \{\vec{e}'\} = [Q]\{\vec{e}\}$$

Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ deux bases orthonormées. La matrice de passage Q est définie par :

$$\vec{e}'_i = Q_{ij} \vec{e}_j \quad \text{ou} \quad \{\vec{e}'\} = [Q]\{\vec{e}\}$$

Les deux bases étant orthonormées :

$$\delta_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = Q_{ik} Q_{jk}$$

Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ deux bases orthonormées. La matrice de passage Q est définie par :

$$\vec{e}'_i = Q_{ij} \vec{e}_j \quad \text{ou} \quad \{\vec{e}'\} = [Q]\{\vec{e}\}$$

Les deux bases étant orthonormées :

$$\delta_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = Q_{ik} Q_{jk}$$

Propriété clé

La matrice Q est **orthogonale** : $[Q]^{-1} = [Q]^T$

Soit \vec{V} de composantes V_i dans la base initiale et V'_i dans la nouvelle :

$$V'_k = V_i Q_{ki} \quad \text{et} \quad V_k = V'_i Q_{ik}$$

Soit \vec{V} de composantes V_i dans la base initiale et V'_i dans la nouvelle :

$$V'_k = V_i Q_{ki} \quad \text{et} \quad V_k = V'_i Q_{ik}$$

En notation matricielle :

$$\{\vec{V}'\} = [Q]\{\vec{V}\} \quad \text{et} \quad \{\vec{V}\} = [Q]^T\{\vec{V}'\}$$

Soit \vec{V} de composantes V_i dans la base initiale et V'_i dans la nouvelle :

$$V'_k = V_i Q_{ki} \quad \text{et} \quad V_k = V'_i Q_{ik}$$

En notation matricielle :

$$\{\vec{V}'\} = [Q]\{\vec{V}\} \quad \text{et} \quad \{\vec{V}\} = [Q]^T\{\vec{V}'\}$$

Invariance du produit scalaire

$$\vec{V}' \cdot \vec{W}' = V'_k W'_k = V_i Q_{ki} W_j Q_{kj} = \delta_{ij} V_i W_j = V_i W_i = \vec{V} \cdot \vec{W}$$

Soit A une application linéaire de composantes A_{ij} dans la base initiale et A'_{ij} dans la nouvelle base.

Soit A une application linéaire de composantes A_{ij} dans la base initiale et A'_{ij} dans la nouvelle base.

En notation indicielle :

$$A'_{ik} = Q_{ij} A_{jm} Q_{km}$$

Soit A une application linéaire de composantes A_{ij} dans la base initiale et A'_{ij} dans la nouvelle base.

En notation indicielle :

$$A'_{ik} = Q_{ij} A_{jm} Q_{km}$$

En notation matricielle :

$$[A'] = [Q][A][Q]^T$$

Section 3

Permutations et déterminants

① Introduction

② Vecteurs et tenseurs

③ *Symbole de Levi-Civita*
Déterminant d'une matrice
Adjoint d'un tenseur antisymétrique

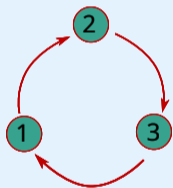
④ Calcul vectoriel et analyse vectorielle

⑤ Formules essentielles en MMC

3

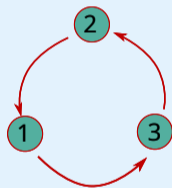
Soient i, j, k trois indices distincts. On dit qu'ils forment une **permutation paire** (resp. **impaire**) de 1, 2, 3 si on peut les y amener par un nombre pair (resp. impair) de permutations.

Soient i, j, k trois indices distincts. On dit qu'ils forment une **permutation paire** (resp. **impaire**) de 1, 2, 3 si on peut les y amener par un nombre pair (resp. impair) de permutations.



Permutation Paire

Paires : (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)



Permutation Impaire

Impaires : (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si deux indices sont égaux} \\ +1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation paire} \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation impaire} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si deux indices sont égaux} \\ +1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation paire} \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation impaire} \end{cases}$$

Ces symboles représentent le produit mixte des vecteurs de base :

$$\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si deux indices sont égaux} \\ +1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation paire} \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation impaire} \end{cases}$$

Ces symboles représentent le produit mixte des vecteurs de base :

$$\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$$

La forme trilinéaire produit mixte :

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = \varepsilon_{ijk} U_i V_j W_k$$

Démonstration que $\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{ijk} = 6$:

Les symboles de permutation permettent le calcul du déterminant :

$$\varepsilon_{ijk} \det(A) = \varepsilon_{mnp} A_{im} A_{jn} A_{kp}$$

Les symboles de permutation permettent le calcul du déterminant :

$$\varepsilon_{ijk} \det(A) = \varepsilon_{mnp} A_{im} A_{jn} A_{kp}$$

Ou encore :

$$\det(A) = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnp} A_{im} A_{jn} A_{kp}$$

Soit Ω un tenseur antisymétrique :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Soit Ω un tenseur antisymétrique :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

On lui associe le vecteur :

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_{23} \\ \Omega_{31} \\ \Omega_{12} \end{Bmatrix}$$

Soit Ω un tenseur antisymétrique :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

On lui associe le vecteur :

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_{23} \\ \Omega_{31} \\ \Omega_{12} \end{Bmatrix}$$

Définition

$\vec{\omega}$ est le **vecteur adjoint** du tenseur antisymétrique Ω .

Section 4

Calcul vectoriel et analyse vectorielle

- 1 Introduction
- 2 Vecteurs et tenseurs
- 3 Permutations et déterminants
- 4**
 - Calcul vectoriel
 - Analyse vectorielle
 - Transformation d'intégrales
- 5 Formules essentielles en MMC

4

Le produit vectoriel $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ s'écrit :

$$c_i \vec{e}_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

Le produit vectoriel $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ s'écrit :

$$c_i \vec{e}_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

Identités vectorielles :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

On note $i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Les opérateurs sont exprimés en repère cartésien orthonormé.

On note $i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Les opérateurs sont exprimés en repère cartésien orthonormé.

Gradient *grad*

Opérateur du 1^{er} ordre qui **augmente** la dimension
(scalaire \rightarrow vecteur, vecteur
 \rightarrow tenseur)

Divergence *div*

Opérateur du 1^{er} ordre qui **diminue** la dimension
(vecteur \rightarrow scalaire, tenseur
 \rightarrow vecteur)

Laplacien Δ

Opérateur du 2^{ème} ordre qui **conserve** la dimension

Gradient (vecteur) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = f_{,i} \vec{e}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{Bmatrix}$$

Gradient (vecteur) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = f_{,i} \vec{e}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{Bmatrix}$$

Laplacien (scalaire) :

$$\Delta f = f_{,ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

Divergence (scalaire) : $\text{Div } \vec{v} = v_{i,i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$

$$\text{Divergence (scalaire)} : \text{Div } \vec{v} = v_{i,i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$\text{Rotationnel (vecteur)} : \text{rot } \vec{v} = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Divergence (scalaire)} : \text{Div } \vec{v} = v_{i,i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$\text{Rotationnel (vecteur)} : \text{rot } \vec{v} = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

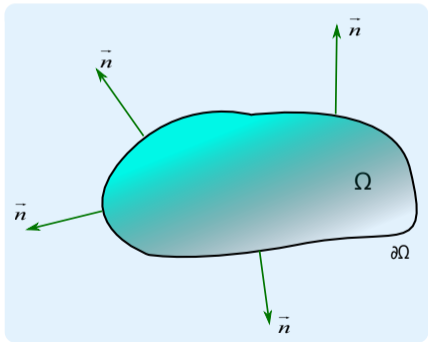
$$\text{Gradient (tenseur)} : \nabla \vec{v} = v_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

La divergence d'un tenseur est un **vecteur** :

$$\text{Div } \overline{\overline{T}} = T_{ij,j} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{array} \right\}$$

Les formules d'Ostrogradsky font correspondre une intégrale de volume à une intégrale de surface. Soit Ω un domaine borné de frontière $\partial\Omega$ et de normale \vec{n} .

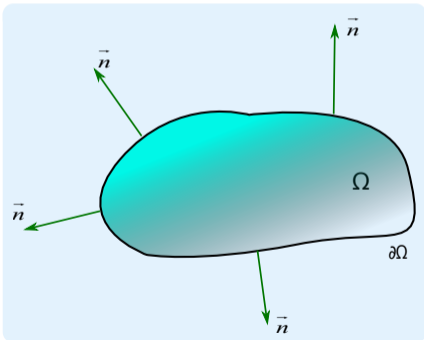
Les formules d'Ostrogradsky font correspondre une intégrale de volume à une intégrale de surface. Soit Ω un domaine borné de frontière $\partial\Omega$ et de normale \vec{n} .



Scalaire ϕ :

$$\iint_{\partial\Omega} \phi \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \phi dV$$

Les formules d'Ostrogradsky font correspondre une intégrale de volume à une intégrale de surface. Soit Ω un domaine borné de frontière $\partial\Omega$ et de normale \vec{n} .



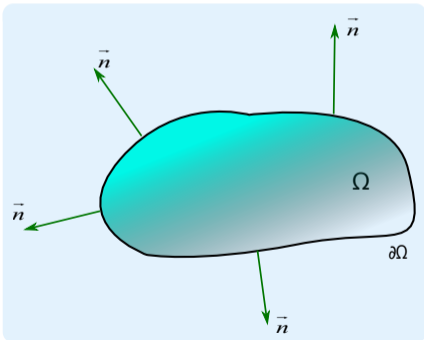
Scalaire ϕ :

$$\iint_{\partial\Omega} \phi \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \, dV$$

Vecteur \vec{A} :

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \text{Div}(\vec{A}) \, dV$$

Les formules d'Ostrogradsky font correspondre une intégrale de volume à une intégrale de surface. Soit Ω un domaine borné de frontière $\partial\Omega$ et de normale \vec{n} .



Scalaire ϕ :

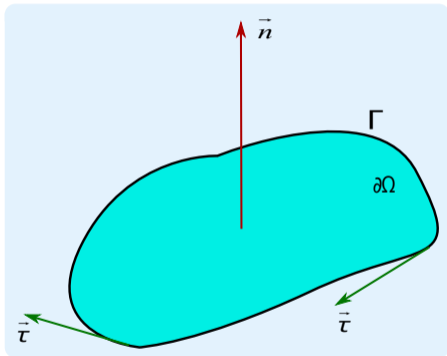
$$\iint_{\partial\Omega} \phi \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \, dV$$

Vecteur \vec{A} :

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \text{Div}(\vec{A}) \, dV$$

Tenseur $\overline{\overline{T}}$:

$$\iint_{\partial\Omega} \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \text{Div}(\overline{\overline{T}}) \, dV$$



Soit $\partial\Omega$ un domaine plan de normale \vec{n} , de frontière Γ .
Si $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à Γ :

$$\iint_{\partial\Omega} \text{rot}(\vec{U}) \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\Gamma} \vec{U} \cdot \vec{\tau} \, dl$$

Section 5

Formules essentielles en MMC

- 1 Introduction
- 2 Vecteurs et tenseurs
- 3 Permutations et déterminants
- 4 Calcul vectoriel et analyse vectorielle
- 5
 - Coordonnées cartésiennes
 - Coordonnées cylindriques
 - Coordonnées sphériques

5

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad \text{soit } \vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$$

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad \text{soit } \vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$$

$$\nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad \text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$
$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \vec{e}_x + \Delta v_y \vec{e}_y + \Delta v_z \vec{e}_z$$

scalaire f

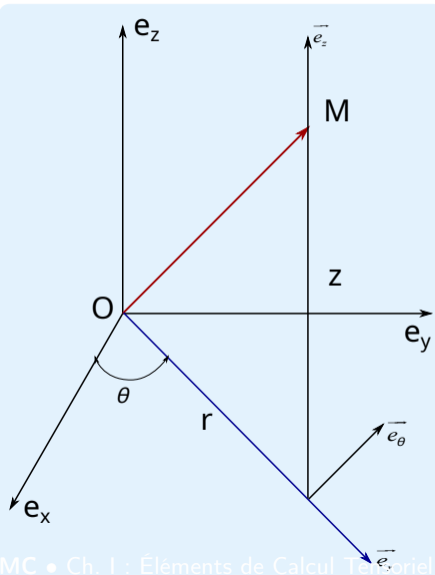
$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

 Tenseur $\overline{\overline{T}}$

$$\operatorname{div} \overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} \Delta T_{xx} & \Delta T_{xy} & \Delta T_{xz} \\ \Delta T_{yx} & \Delta T_{yy} & \Delta T_{yz} \\ \Delta T_{zx} & \Delta T_{zy} & \Delta T_{zz} \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= r\vec{e}_r + z\vec{e}_z, & d(\overrightarrow{OM}) &= dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} &= \vec{e}_\theta, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\vec{e}_r, & \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} &= 0 \\ \text{toutes les autres dérivées} &= & & & & 0 \end{aligned}$$

Soit $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{e}_z$:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

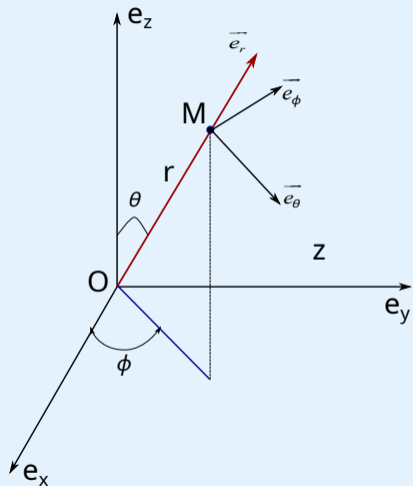
Scalaire f :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z, \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Soit $\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{bmatrix}$, alors :

Soit $\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{bmatrix}$, alors :

$$\operatorname{div}(\overline{\overline{T}}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \end{array} \right\}$$



$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r, \quad d(\overrightarrow{OM}) = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r, \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = \sin \theta \vec{e}_\phi$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi} = \cos \theta \vec{e}_\phi, \quad \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = -\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta$$

Scalaire f :

$$\nabla f = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{array} \right\}$$

Soit $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\phi \vec{e}_\phi$:

$$\vec{\text{grad}}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \cotg \theta v_\phi \right) \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \cotg \theta v_\theta + v_r \right) \end{bmatrix}$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cotg \theta}{r} v_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\operatorname{div}(\overline{\overline{T}}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi} + T_{r\theta} \cotg \theta}{r} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{(T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi}) \cotg \theta + 3T_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{2T_{\theta\phi} \cotg \theta + 3T_{r\phi}}{r} \end{array} \right\}$$

Merci de votre attention !

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

MMC