COURS PÉDAGOGIQUE

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Chapitre VIII : Loi de comportement élastique linéaire

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

18 mai 2026

Plan du cours

1. Loi de comportement
2. Modèle élastique linéaire isotrope
   - Définition
   - Paramètres usuels
3. Élasticité en sollicitations simples
   - Contrainte uniaxiale
   - Cisaillement simple
   - Compression hydrostatique

Section 1

Loi de comportement

1

2 Modèle élastique linéaire isotrope

3 Élasticité en sollicitations simples

1

Les deux tenseurs fondamentaux

Tenseur des déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$

Possède une base propre $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3})$ dans laquelle il est diagonal :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont les **déformations principales**.

Tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$

Possède une base propre $(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3})$ dans laquelle il est diagonal :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les **contraintes principales**.

Jusqu'ici, aucun lien n'a été établi entre $\overline{\overline{\varepsilon}}$ et $\overline{\overline{\sigma}}$. C'est l'objet de la **loi de comportement**.

Modèle de comportement — Définition générale

Un **modèle de comportement** est une fonctionnelle qui fournit la contrainte $\overline{\overline{\sigma}}$ en un point donné à partir de l'historique des déformations :

$$\overline{\overline{\sigma}}(\overrightarrow{x}, t) = \mathfrak{F}\left[\overline{\overline{E}}(\tau) \,\middle|\, \tau \leq t\right]$$

Cette formulation est trop générale pour un usage pratique. On la simplifie par trois hypothèses successives :

1. **Loi locale** : la contrainte en un point ne dépend que de l'historique de déformation de la particule qui occupe ce point.
2. **HPP** : on utilise le tenseur des déformations linéarisées $\overline{\overline{\varepsilon}}$.
3. **Matériau sans mémoire** : l'état de contrainte à un instant donné ne dépend que de l'état de déformation *au même instant*.

Modèle de comportement — Forme simplifiée

Modèle simplifié

Sous ces trois hypothèses, la fonctionnelle se réduit à une simple **fonction** :

$$\boxed{\overline{\overline{\sigma}}(\overrightarrow{x}, t) = f\left[\overline{\overline{\varepsilon}}(\overrightarrow{x}, t)\right]}$$

Si cette fonction est inversible : $\overline{\overline{\varepsilon}}(\overrightarrow{x}, t) = f^{-1}\left[\overline{\overline{\sigma}}(\overrightarrow{x}, t)\right]$

Cas des fluides — Mémoire infiniment courte

Pour les fluides, la contrainte dépend non pas des déformations mais du **taux de déformation** à l'instant considéré :

$$\overline{\overline{\sigma}}(\overrightarrow{x}, t) = \mathfrak{F}\left[\overline{\overline{\varepsilon}}(\overrightarrow{x}, t),\ \frac{d}{dt}\overline{\overline{\varepsilon}}(\overrightarrow{x}, t)\right]$$

C'est le cas du modèle de **fluide visqueux**.

Section 2

Modèle élastique linéaire isotrope

1 Loi de comportement

2

Définition

Paramètres usuels

3 Élasticité en sollicitations simples

2

Milieu élastique — Définition

Loi locale et sans mémoire, avec deux propriétés supplémentaires

- Il existe pour chaque particule un **état de référence** (état au repos) tel que $\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{0}}$ et $\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{0}}$ simultanément.
- L'état de contrainte ne dépend que de l'état de déformation **par rapport à cet état de référence**.

Définition physique

Un milieu élastique est un milieu qui **se déforme sous un chargement** (quelle que soit la nature et la quantité de cette déformation), et qui **revient exactement à son état initial** lorsqu'on supprime le chargement.

Élasticité linéaire — Hypothèses

Hypothèses supplémentaires du modèle élastique linéaire

- Le mouvement est conforme à l'**HPP**
- La relation entre contraintes et déformations est **affine**

Conséquence — Loi de comportement générale

Chaque composante du tenseur des contraintes est une **combinaison linéaire** de toutes les composantes du tenseur des déformations :

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$$

a_{ijkl} est le **tenseur de rigidité élastique** (ordre 4).

Matrice des raideurs élastiques

En notation matricielle condensée (notation de Voigt) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix}$$

La matrice a est la **matrice des raideurs élastiques**. Elle possède **21 termes indépendants** (par symétrie du tenseur d'ordre 4).

Isotropie — Coefficients de Lamé

Hypothèse d'isotropie

Le comportement mécanique du milieu est **invariant par rotation** : le matériau se comporte de la même manière dans toutes les directions.

Conséquence

Sous cette hypothèse, les 21 paramètres se réduisent à **2 paramètres**, appelés **coefficients de Lamé** λ et μ (homogènes à une pression : kPa, MPa).

Remarque

L'hypothèse d'isotropie est parfois mise en défaut pour les matériaux à direction structurelle privilégiée : bois, composites, etc.

Robert Hooke
1635 - 1703

Loi de Hooke — Coefficients de Lamé

$$\boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \lambda \,\mathrm{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}})\,\overline{\overline{I}} + 2\mu\,\overline{\overline{\varepsilon}}}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}$$

Propriété remarquable

En élasticité linéaire isotrope, les **directions principales** de déformations et de contraintes sont **identiques**. Cette propriété disparaît dès que l'on sort de l'une des hypothèses (élasticité, linéarité, isotropie).

Module d'Young et coefficient de Poisson

Thomas Young
1773 - 1829

Siméon Denis Poisson
1781 - 1840

Les coefficients de Lamé ont une grande importance théorique, mais en pratique on utilise deux paramètres d'usage plus courant, directement mesurables :

Paramètres pratiques

- **Module d'Young** E
- **Coefficient de Poisson** ν

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Loi de Hooke avec E et ν

Loi directe ($\bar{\bar{\varepsilon}} \to \bar{\bar{\sigma}}$)

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\bar{\bar{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\mathrm{tr}(\bar{\bar{\varepsilon}})\,\bar{\bar{I}}\right)$$

Loi inverse ($\bar{\bar{\sigma}} \to \bar{\bar{\varepsilon}}$)

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}(\bar{\bar{\sigma}})\,\bar{\bar{I}}$$

Loi de Hooke — Forme matricielle

Loi directe

$$\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{23}\end{pmatrix}$$

Grâce à l'isotropie du matériau, ces relations sont vraies dans **toute base**.

Loi de Hooke — Forme matricielle inverse

Loi inverse

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}$$

Module de cisaillement

On identifie le deuxième coefficient de Lamé comme le **module de cisaillement** :

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Section 3

Élasticité en sollicitations simples

1 Loi de comportement

2 Modèle élastique linéaire isotrope

3

- Contrainte uniaxiale
- Cisaillement simple
- Compression hydrostatique

3

Traction uniaxiale

Sollicitation

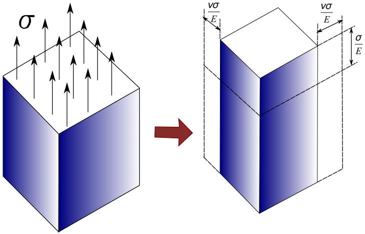
Un cube unitaire est soumis à une traction uniaxiale selon $\overrightarrow{e_1}$:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déformation — Application de la loi de Hooke

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma \end{pmatrix}$$

Module d’Young et effet Poisson



Module d’Young E

$\varepsilon_{11} = \sigma / E$: E est le coefficient de proportionnalité entre une **déformation axiale** et la **contrainte normale** qui l’a produite.

Effet Poisson

Bien que la sollicitation soit uniaxiale, les directions transversales $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ se déforment également. Ce phénomène est l’**effet Poisson** :

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\,\varepsilon_{11}$$

Coefficient de Poisson — Limites et mesure

Cas limites de ν

- $\nu = 0$: aucune déformation transversale — l'effet Poisson disparaît
- $\nu = 0{,}5$: $\mathrm{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}}) = 0$ — matériau **parfaitement incompressible**

$$\boxed{0 < \nu < 0{,}5}$$

Détermination expérimentale

Par essai de traction uniaxiale :

- mesure de la **déformation axiale** $\Rightarrow$ accès à E
- mesure de la **déformation transversale** $\Rightarrow$ accès à ν

C'est la raison pour laquelle E et ν sont d'usage plus répandu que les coefficients de Lamé.

Cisaillement simple

Sollicitation

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déformation — Application de la loi de Hooke

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1+\nu}{E}\tau & 0 \\ \dfrac{1+\nu}{E}\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\tau}{2\mu} & 0 \\ \dfrac{\tau}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un cisaillement induit un **glissement pur**, sans variation de volume.

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \frac{\tau}{\mu} = \frac{\tau}{G}$$

Module de cisaillement $G = \mu$

G est le coefficient de proportionnalité entre une contrainte de cisaillement et le **glissement induit**. On l'appelle aussi **module de glissement**.

Déformations dans la base principale (bissectrices)

Dans la base principale (à 45° de la base de départ) :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tau}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un cisaillement simple produit deux **dilatations opposées** selon les bissectrices, proportionnelles à la contrainte via le module G.

Compression hydrostatique

Sollicitation isotrope

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\,\overline{\overline{I}}$$

Déformation — Application de la loi de Hooke

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = -\frac{p(1-2\nu)}{E}\,\overline{\overline{I}}$$

Du fait de l'isotropie : une contrainte isotrope conduit logiquement à une **déformation isotrope**.

Module de compressibilité

Module de compressibilité K

$$\boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu}$$

En substituant dans le tenseur des déformations :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = -\frac{p}{3K}\overline{\overline{I}} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}}) = -\frac{p}{K}$$

Interprétation physique

K est le coefficient de proportionnalité entre la **pression appliquée** à un milieu continu et sa **perte de volume relative** :

$$\frac{\Delta v}{v} = \mathrm{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}}) = -\frac{p}{K}$$

Plus K est grand, plus le matériau est difficile à comprimer.

Récapitulatif des paramètres élastiques

Relations entre les constantes élastiques isotropes

Paramètre	Symbole	Expression via λ, μ	Signification physique
Module d'Young	E	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	Rigidité en traction
Coeff. de Poisson	ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	Contraction transversale
Module de cisaillement	$G = \mu$	μ	Rigidité en cisaillement
Module de compressibilité	K	$\lambda + \frac{2\mu}{3}$	Rigidité en compression isotrope

Merci de votre attention !

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

MMC