

COURS PÉDAGOGIQUE

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Chapitre VII : Contraintes

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

18 mai 2026

Plan du cours

- 1 Objectif
- 2 Interactions — Cadre newtonien
 - Espace et Temps
 - Origine des forces
 - Principe fondamental de la dynamique
 - Principe d'action-réaction
- 3 Champ de contrainte
 - Partitionnement et forces internes
 - Vecteur contrainte
- 4 Propriétés des contraintes
 - Tenseur des contraintes
 - Équilibre dynamique local
- 5 Diagonalisation du tenseur des contraintes
 - Contraintes et directions principales
 - Invariants du tenseur des contraintes
- 6 Représentation graphique d'un état de contrainte
 - Tricercle de Mohr
 - Cercle de Mohr
- 7 Conditions aux limites en contraintes

Section 1

Objectif

- 1
- 2 Interactions — Cadre newtonien
- 3 Champ de contrainte
- 4 Propriétés des contraintes
- 5 Diagonalisation du tenseur des contraintes
- 6 Représentation graphique d'un état de contrainte
- 7 Conditions aux limites en contraintes

1

Dans ce chapitre on s'intéresse aux **forces internes** qui se développent dans un solide soumis à des actions extérieures.

On évoquera comment ces forces se déclinent en **contraintes**, comment les contraintes sont décrites par un **tenseur**, et comment **l'équilibre local** est régi.

La notion de force, même si elle semble intuitive de prime abord, pose un problème de définition.

Une force est un concept ayant un **caractère vectoriel** ; elle est souvent définie en référence à sa capacité d'accélérer une masse — concept newtonien. Un ensemble de forces peut être réduit, du point de vue mathématique, à un **torseur**.

Section 2

Interactions — Cadre newtonien

① Objectif

②

Espace et Temps

Origine des forces

Principe fondamental de la dynamique

Principe d'action-réaction

③ Champ de contrainte

④ Propriétés des contraintes

⑤ Diagonalisation du tenseur des contraintes

2

Bien que la théorie de la relativité (Einstein, 1905) dénie l'unicité du temps en remettant en question la notion de simultanéité, le cours de MMC reprend les hypothèses formulées par **Isaac Newton** (1642–1727) sur l'espace et le temps, qui prévalent en mécanique classique.

Hypothèse sur l'espace

Newton fait l'hypothèse d'un espace dont la structure euclidienne est **indépendante** de la présence des corps matériels : « L'espace absolu, sans relation aux choses extérieures, demeure toujours similaire et immobile. »

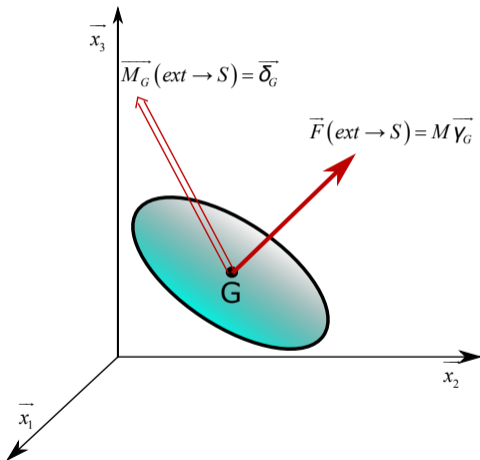
Référentiel galiléen

Les référentiels en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres sont dits **galiléens**. En pratique, un repère calé sur des étoiles « fixes » lointaines de la Galaxie constitue un repère galiléen. Pour la plupart des applications en génie civil, un référentiel lié à la Terre constitue une bonne approximation.

Hypothèse sur le temps

Newton fait l'hypothèse d'une chronologie absolue, commune à tous les sites de l'espace : « *Le temps absolu vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément et s'appelle durée.* »

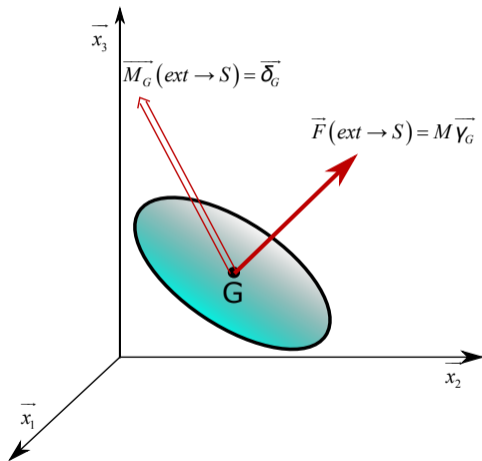
Pour lui, toutes les horloges sont synchronisables quelle que soit leur distance réciproque ou leur vitesse relative. De ce fait, la **simultanéité** de deux événements peut toujours être établie.



Les forces résultent principalement de deux interactions entre les particules constitutives des solides, parmi les quatre interactions connues (forte, électromagnétique, faible et gravitationnelle).

En mécanique classique

1. **Forces de contact** : répulsives, d'origine électromagnétique
2. **Forces à distance** : uniquement attractives, d'origine gravitationnelle



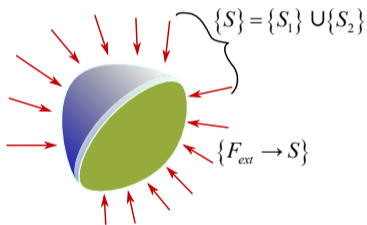
Dans tout repère galiléen R_0 , le torseur des actions extérieures $\{F_{\text{ext} \rightarrow S}\}$ agissant sur un solide S est égal au torseur dynamique $\{D_{S/R_0}\}$:

PFD — En résultante et moment en G

$$\begin{cases} \vec{F}(\text{ext} \rightarrow S) = \int_S \rho \vec{\gamma} dv = M\vec{\gamma}_G \\ \vec{M}_G(\text{ext} \rightarrow S) = \int_S \vec{GM} \wedge \rho \vec{\gamma} dv = \vec{\delta}_G \end{cases}$$

Statique ($\vec{\gamma} = \vec{0}$)

$$\vec{F}(\text{ext} \rightarrow S) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{M}_G(\text{ext} \rightarrow S) = \vec{0}$$



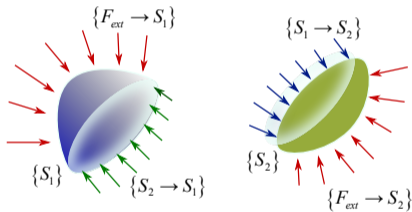
Considérons un solide $S = S_1 \cup S_2$. Le PFD appliqué au solide entier donne :

$$\{F_{\text{ext} \rightarrow S}\} = \{D_{S/R_0}\}$$

Après séparation, le PFD appliqué à S_1 puis à S_2 donne :

$$\{F_{\text{ext} \rightarrow S_1}\} + \{S_2 \rightarrow S_1\} = \{D_{S_1/R_0}\}$$

$$\{F_{\text{ext} \rightarrow S_2}\} + \{S_1 \rightarrow S_2\} = \{D_{S_2/R_0}\}$$



En sommant les deux équations et en utilisant $\{F_{ext \rightarrow S_1}\} + \{F_{ext \rightarrow S_2}\} = \{F_{ext \rightarrow S}\}$, il vient :

$$\{S_2 \rightarrow S_1\} + \{S_1 \rightarrow S_2\} = \{0\}$$

Principe d'action-réaction

$$\boxed{\{S_2 \rightarrow S_1\} = -\{S_1 \rightarrow S_2\}}$$

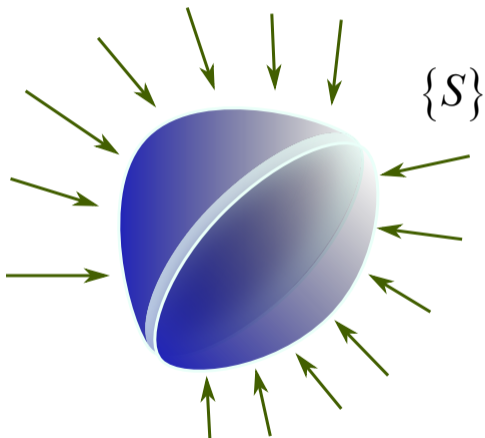
Au niveau **local** : en tout point de l'interface, la force surfacique exercée par S_1 sur S_2 est l'opposée de celle exercée par S_2 sur S_1 .

Section 3

Champ de contrainte

- 1 Objectif
- 2 Interactions — Cadre newtonien
- 3 **Partitionnement et forces internes**
Vecteur contrainte
- 4 Propriétés des contraintes
- 5 Diagonalisation du tenseur des contraintes
- 6 Représentation graphique d'un état de contrainte

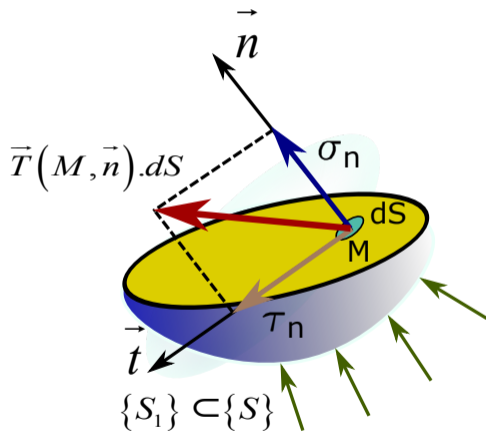
3



Soit un solide S soumis à des efforts extérieurs. On le partitionne par un plan arbitraire en S_1 et S_2 .

La portion S_1 est soumise à :

- ▶ une partie des efforts extérieurs (poids volumique + forces appliquées sur la frontière de S commune à S_1)
- ▶ l'ensemble des efforts qu'exerce S_2 sur S_1 à travers la surface de contact Ω — ils traduisent la **cohésion** du solide entier

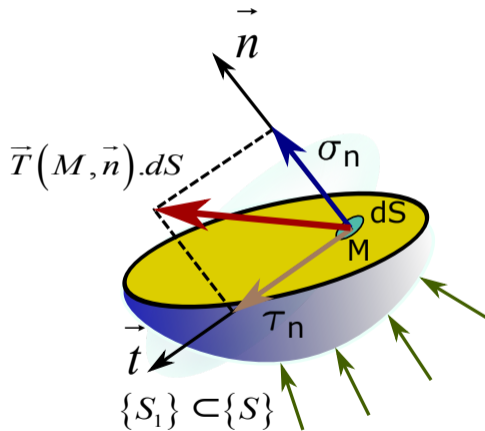


L'action de S_2 sur S_1 est modélisée par une distribution de forces surfaciques dépendant du point M et de l'orientation locale \vec{n} (vecteur normal unitaire extérieur à S_1).

Postulat de Cauchy

Ces forces ont un **caractère local** : elles ne dépendent que de M et de \vec{n} , et non de la forme ou du volume de S_1 .

$$\tilde{\sigma} : (M, \vec{n}) \longrightarrow \vec{T}(M, \vec{n})$$



Décomposition du vecteur contrainte

Le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ se décompose sur la normale \vec{n} et le plan tangent \vec{t} à la facette :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$$

Définitions

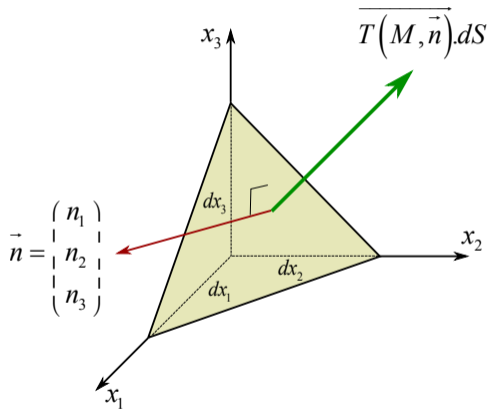
- ▶ σ_n : **contrainte normale** (traction si > 0 , compression si < 0)
- ▶ τ_n : **contrainte tangente** (ou contrainte de cisaillement / cission)

Section 4

Propriétés des contraintes

- 1 Objectif
- 2 Interactions — Cadre newtonien
- 3 Champ de contrainte
- 4 **4**
Tenseur des contraintes
Équilibre dynamique local
- 5 Diagonalisation du tenseur des contraintes
- 6 Représentation graphique d'un état de contrainte

4



On inscrit un petit tétraèdre en M , dont trois facettes sont parallèles aux plans du repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. La quatrième facette, de surface dS , est orientée par \vec{n} .

Le bilan des forces sur le tétraèdre, lorsque ses dimensions tendent vers zéro, donne (les termes de volume deviennent négligeables) :

$$\vec{T} dS - \vec{\phi}_1 dS_1 - \vec{\phi}_2 dS_2 - \vec{\phi}_3 dS_3 \simeq \vec{0}$$

avec $dS_i = n_i dS$, d'où :

$$\vec{T} = n_1 \vec{\phi}_1 + n_2 \vec{\phi}_2 + n_3 \vec{\phi}_3$$

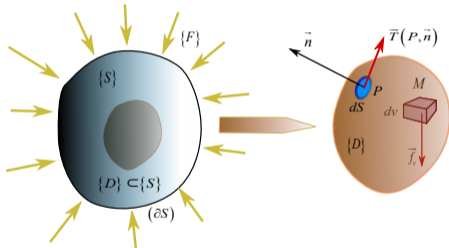
Représentation matricielle

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Formule de Cauchy

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}(M) \cdot \vec{n}$$

Le champ tensoriel $\overline{\overline{\sigma}}(M)$, fonction du point M , est appelé **tenseur des contraintes de Cauchy**. La composante σ_{ij} est la contrainte agissant sur la facette orientée par \vec{e}_j dans la direction \vec{e}_i .



Le PFD appliqué en résultante à tout sous-domaine $D \subset S$:

$$\iiint_D \vec{f}_v \, dv + \oint_{\partial D} \vec{T}(P, \vec{n}) \, dS = \iiint_D \rho \vec{\gamma} \, dv$$

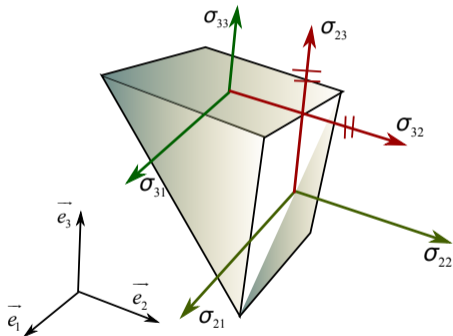
Le théorème de la divergence transforme l'intégrale de surface :

$$\oint_{\partial D} \vec{T} \, dS = \int_D \overrightarrow{\text{div}}(\bar{\sigma}) \, dv$$

Équilibre local (dynamique)

$$\overrightarrow{\text{div}}(\bar{\sigma}) + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma}$$

En statique : $\overrightarrow{\text{div}}(\bar{\sigma}) + \vec{f}_v = \vec{0}$



L'application du PFD en **moment** à tout sous-domaine D , combinée à l'équation d'équilibre locale en résultante, conduit à l'annulation de la partie antisymétrique de $\bar{\sigma}$:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \forall i, j$$

Symétrie du tenseur de Cauchy

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^T$$

Interprétation — Réciprocité des cisaillements

La composante σ_{ij} (agissant sur la facette j dans la direction i) est égale à σ_{ji} (agissant sur la facette i dans la direction j). Cela garantit l'équilibre en moment de toutes les particules.

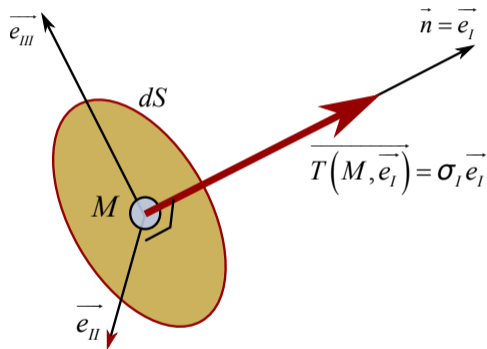
Section 5

Diagonalisation du tenseur des contraintes

- 1 Objectif
- 2 Interactions — Cadre newtonien
- 3 Champ de contrainte
- 4 Propriétés des contraintes
- 5 Contraintes et directions principales
Invariants du tenseur des contraintes
- 6 Représentation graphique d'un état de contrainte

5

Le tenseur des contraintes est **symétrique**. Il existe donc une base orthonormée dans laquelle sa matrice est **diagonale** et les valeurs propres sont réelles.



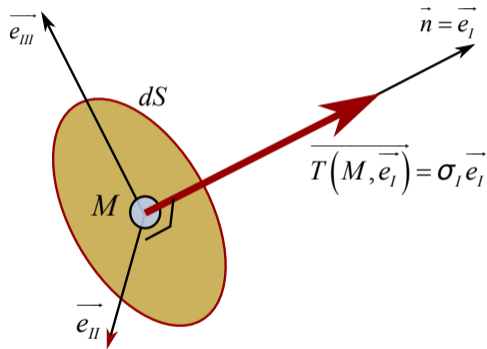
Définition

Les **contraintes principales** $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ (classées par ordre décroissant) sont les valeurs propres du tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$, solutions de l'équation caractéristique :

$$\det \left| \overline{\overline{\sigma}} - \lambda \overline{\overline{I}} \right| = 0$$

Tenseur dans la base principale

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \{ \overline{e}_I, \overline{e}_{II}, \overline{e}_{III} \}$$



Les **directions principales** $\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}$ sont les vecteurs propres associés à $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$, solutions de :

$$(\vec{\sigma} - \sigma_J \vec{I}) \cdot \vec{e}_J = \vec{0}, \quad J = I, II, III$$

Propriété clé

Sur les facettes orientées par les directions principales, le vecteur contrainte est **purement normal** : la contrainte de cisaillement τ est nulle.

L'équation caractéristique se développe en :

$$\det \left| \bar{\sigma} - \lambda \bar{I} \right| = -\lambda^3 + L_1 \lambda^2 - L_2 \lambda + L_3 = 0$$

Les coefficients L_1, L_2, L_3 sont **indépendants de la base de projection** : ce sont les **invariants** du tenseur des contraintes.

Dans une base quelconque

$$\begin{cases} L_1 = \text{tr}(\bar{\sigma}) = \sigma_{kk} \\ L_2 = \frac{1}{2} \left(\text{tr}^2(\bar{\sigma}) - \text{tr}(\bar{\sigma}^2) \right) \\ L_3 = \det \left| \bar{\sigma} \right| \end{cases}$$

Dans la base principale

$$\begin{cases} L_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ L_2 = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I \\ L_3 = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \end{cases}$$

Section 6

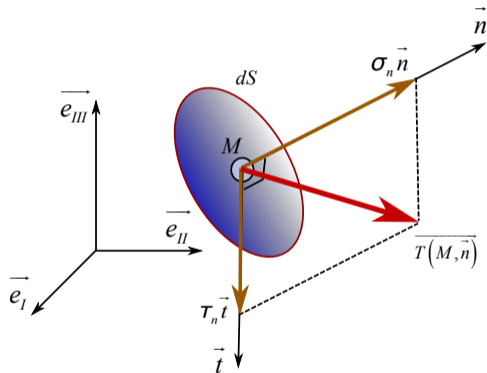
Représentation graphique d'un état de contrainte

- 1 Objectif
- 2 Interactions — Cadre newtonien
- 3 Champ de contrainte
- 4 Propriétés des contraintes
- 5 Diagonalisation du tenseur des contraintes

6

Tricercle de Mohr
Cercle de Mohr

6



Soit une facette en M , orientée par $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ dans la base principale. Les composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte vérifient :

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \\ \tau_n^2 = \|\vec{T}\|^2 - \sigma_n^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \\ \sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III} \end{cases}$$

En résolvant le système précédent, on obtient :

$$n_1^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III})}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})} \geq 0$$

$$n_2^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_{III})(\sigma_n - \sigma_I)}{(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_I)} \geq 0$$

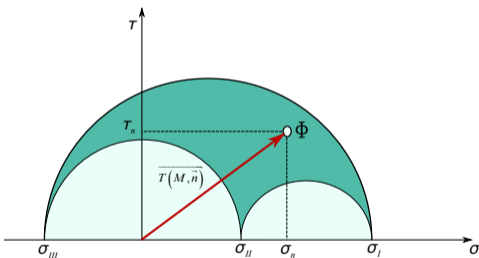
$$n_3^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II})}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})} \geq 0$$

Tricercler de Mohr

Ces inéquations définissent une région géométrique dans le plan (σ, τ) délimitée par **trois cercles** : c'est le **tricercler de Mohr**. Tout état de contrainte (σ_n, τ_n) est un point de cette région.

On considère une facette dS perpendiculaire au plan $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}$, soit $n_3 = 0$. La troisième inéquation devient une égalité :

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II}) = 0$$

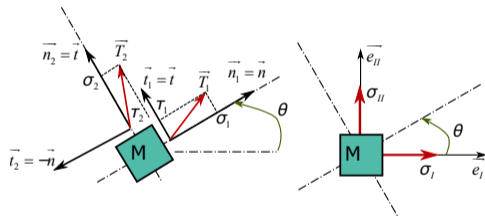


Cercle de Mohr

En réarrangeant :

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2$$

Le point figuratif $\Phi(\sigma_n, \tau_n)$ se situe sur un cercle de centre $\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II})$ et de rayon $R = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$.



État plan — Tenseur 2D

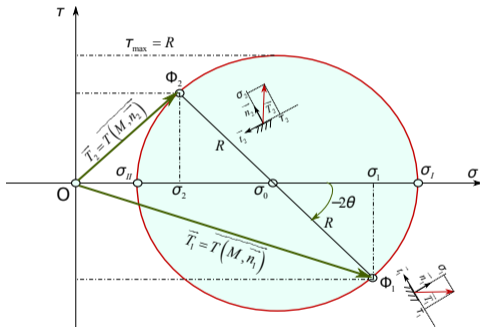
$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_{II} \end{pmatrix}_{\{\bar{e}_I, \bar{e}_{II}\}}$$

Pour $\vec{n} = \cos \theta \vec{e}_I + \sin \theta \vec{e}_{II}$, en notant $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$:

Composantes en angle double

$$\sigma_n = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_n = -\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin 2\theta$$

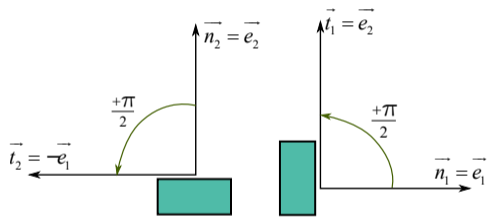


Note 1 — Point figuratif

Dans le plan (σ, τ) , le point figuratif Φ du vecteur contrainte est situé sur un cercle centré en $\Phi_0(\sigma_0, 0)$ de rayon R , avec $\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II})$ et $R = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$.

Note 2 — Règle de rotation

Si la normale à la facette fait un angle θ avec \vec{e}_I , alors le rayon $[\Phi_0\Phi]$ fait un angle -2θ avec l'axe $O\sigma$ (attention au changement de sens de rotation).



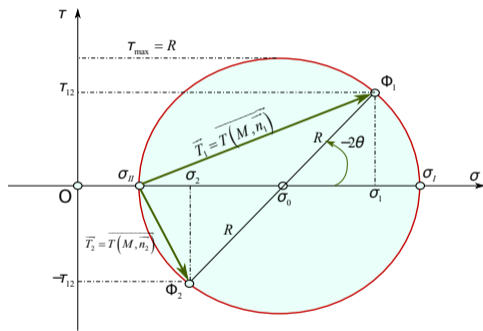
Si le tenseur est connu dans une base quelconque :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}}$$

Les vecteurs contraintes agissant sur les facettes $\vec{n}_1 = \vec{e}_1$ et $\vec{n}_2 = \vec{e}_2$ sont :

$$\vec{T}_1 = \sigma_{11} \vec{n}_1 + \tau_{12} \vec{t}_1$$

$$\vec{T}_2 = \sigma_{22} \vec{n}_2 - \tau_{12} \vec{t}_2$$



Les points figuratifs $\Phi_1(\sigma_{II}, \tau_{12})$ et $\Phi_2(\sigma_{II}, -\tau_{12})$ sont diamétralement opposés sur le cercle de Mohr (car $\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2} = \pi/2$).

Cercle de Mohr — Résultats

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2}$$

$$\sigma_I = \sigma_0 + R, \quad \sigma_{II} = \sigma_0 - R$$

$$\theta = -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\tau_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_0}\right)$$

Section 7

Conditions aux limites en contraintes

- ① Objectif
- ② Interactions — Cadre newtonien
- ③ Champ de contrainte
- ④ Propriétés des contraintes
- ⑤ Diagonalisation du tenseur des contraintes
- ⑥ Représentation graphique d'un état de contrainte

7

7

Aux limites du solide, les vecteurs contraintes agissant sur les facettes de l'enveloppe ∂S ne sont autres que les **forces surfaciques** qui y sont appliquées.

Condition de Neumann en contraintes

Sur la partie ∂S_f où les forces de surface sont connues :

$$\bar{\sigma}(P) \cdot \vec{n}(P) = \vec{f}_s(P), \quad \forall P \in \partial S_f$$

Étapes de traitement d'une condition limite en contraintes

1. Déterminer l'équation du **bord** (surface en 3D ou ligne en 2D) : $\psi(P) = 0$
2. Déterminer le vecteur normal extérieur $\vec{n}(P)$
3. Calculer le vecteur contrainte $\bar{\sigma}(P) \cdot \vec{n}(P)$
4. Identifier avec la force de surface imposée $\vec{f}_s(P)$ pour déduire des conditions portant sur les composantes du tenseur des contraintes

Merci de votre attention !

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

MMC