

COURS PÉDAGOGIQUE

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Chapitre VI : Conservation de la masse — Équation de continuité

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

17 mai 2026

- ① Introduction
- ② Équation de continuité — Cas régulier
- ③ Cas avec surface de discontinuité

Section 1

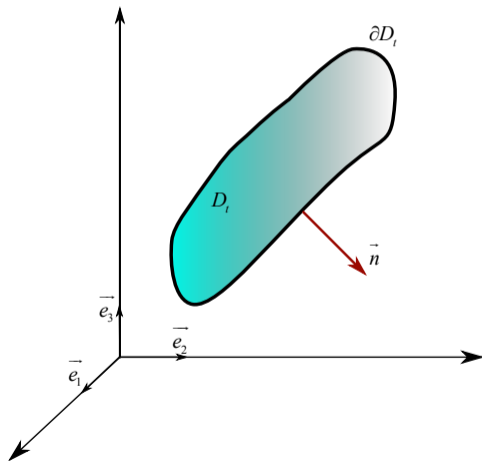
Introduction

- 1
- 2 Équation de continuité — Cas régulier
- 3 Cas avec surface de discontinuité

1

On procédera, dans ce chapitre, à une première application de la notion de **dérivée particulière**. Il s'agit d'établir l'équation traduisant la **conservation de la masse**.^a

a. En Mécanique classique, la masse se conserve au cours du temps, ce qui n'est pas le cas en Mécanique relativiste.



Soit un milieu occupant à l'instant t un domaine D_t de bord ∂D_t , de vecteur normal \vec{n} et de volume γ_t .

Masse volumique

On définit la densité volumique $\rho(\vec{x}, t)$, avec $\rho(\vec{x}, 0) = \rho_0(\vec{X})$, telle que :

$$M = \int_{\gamma_t} \rho(\vec{x}, t) dv = \int_{\gamma_0} \rho(\vec{\phi}(\vec{X}, t), t) J dv_0$$

Principe de conservation

Pour tout système matériel :

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

Section 2

Équation de continuité — Cas régulier

- 1 Introduction
- 2
- 3 Cas avec surface de discontinuité

2

Hypothèse

ρ et \vec{V} sont **continues et continûment différentiables** dans D_t .

D'après la formule de Reynolds, on a :

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\gamma_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial \gamma_t} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds$$

Par le théorème de la divergence :

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\gamma_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right] dv$$

La conservation de la masse s'exprime pour tout sous-domaine γ_t :

$$\forall \gamma_t, \int_{\gamma_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right] dv = 0$$

Équation locale (forme eulérienne)

Par le caractère arbitraire de γ_t :

$$\boxed{\forall \vec{x} \in D_t, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0}$$

En développant $\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\rho) \cdot \vec{V} + \rho \operatorname{div}(\vec{V})$, et en reconnaissant la dérivée particulaire :

$$\frac{d\rho}{dt} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\rho) \cdot \vec{V} = \frac{d\rho}{dt}$$

Équation de continuité

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{V}) = 0$$

C'est l'équation de conservation de la masse, également appelée **équation de continuité**.

Fluide incompressible

Si $\rho = \text{cste}$, alors $\frac{d\rho}{dt} = 0$, d'où : $\operatorname{div}(\vec{V}) = 0$.

Soit un volume élémentaire de masse dm . On note dv_0 son volume dans la configuration de référence et dv celui dans la configuration actuelle. La masse dm étant conservée :

$$dm = \rho_0 dv_0 = \rho dv \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{dv_0}{dv}$$

Résultat clé

Or $dv = J dv_0$, donc $\frac{dv_0}{dv} = \frac{1}{J}$, d'où :

$$\boxed{\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{J}}$$

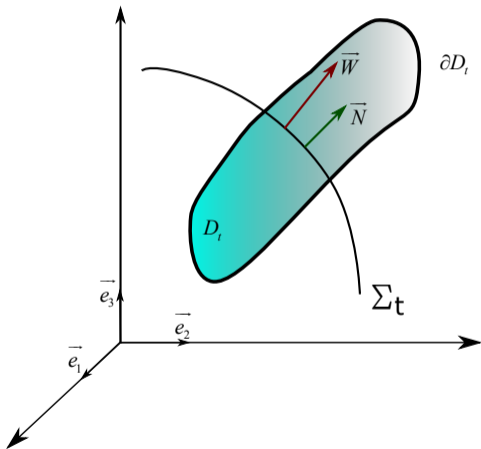
La variation de masse volumique est directement liée au Jacobien de la transformation.

Section 3

Cas avec surface de discontinuité

- 1 Introduction
- 2 Équation de continuité — Cas régulier
- 3

3



Soit Σ_t , de vecteur normal \vec{N} (orienté du côté 1 vers le côté 2), une surface géométrique au franchissement de laquelle ρ et/ou \vec{V} sont **discontinues**.

On note \vec{W} la **vitesse de propagation** de Σ_t . La quantité $(\vec{V} - \vec{W})$ représente la vitesse relative des particules par rapport à la surface.

La formule de Reynolds généralisée donne, pour tout γ_t et toute Σ_t :

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\gamma_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right] dv + \int_{\Sigma_t} \left[\rho(\vec{V} - \vec{W}) \right] \cdot \vec{N} d\Sigma = 0$$

Équations locales

En exploitant le caractère arbitraire de γ_t et de Σ_t :

- ▶ Dans D_t : $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{V}) = 0$
- ▶ Sur Σ_t : $\left[\rho(\vec{V} - \vec{W}) \right] \cdot \vec{N} = 0$

Définition

La quantité

$$\mu = \rho (\vec{V} - \vec{W}) \cdot \vec{N}$$

est appelée **débit massique surfacique** à travers Σ_t .

Condition de saut

$$\llbracket \mu \rrbracket = 0$$

Le débit massique se conserve à la traversée de Σ_t : « ce qui rentre = ce qui sort » — Σ_t ne crée ni n'absorbe de particules.

Cas 1 — Onde de choc ($\mu \neq 0$)

La vitesse \vec{V} des particules est différente de la vitesse \vec{W} de Σ_t .

Σ_t **traverse la matière** : elle ne porte pas les mêmes particules au cours de son mouvement.

On parle d'**onde de choc**.

Cas 2 — Surface matérielle ($\mu = 0$)

On a $\vec{V} \cdot \vec{N} = \vec{W} \cdot \vec{N}$: la vitesse normale des particules est égale à la vitesse normale de Σ_t .

Σ_t est une **surface particulière** (ou matérielle). Elle suit les particules dans leur mouvement.

Exemple : interface entre couches dans un matériau composite.

Merci de votre attention !

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

MMC