COURS PEDAGOGIQUE

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Chapitre V : Cinématique du milieu continu

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

17 mai 2026

Plan du cours

Section 1

Introduction

1

Introduction

Au chapitre précédent, on s'est attaché à la comparaison entre la configuration de référence et la configuration actuelle, essentiellement au plan géométrique, sans considération de l'histoire intermédiaire du système étudié.

On se propose maintenant de **suivre l'évolution du système en fonction du temps** et d'examiner l'aspect purement géométrique de cette évolution : c'est l'étude de la **cinématique du milieu continu** tridimensionnel.

À partir de celle-ci, on examinera d'autres aspects de cette évolution — notamment les grandeurs physiques dans leurs représentations eulériennes et leurs dérivations temporelles.

Description eulérienne incrémentale

La description eulérienne permet une description **incrémentale** de l'évolution d'un milieu continu.

Elle consiste principalement à suivre l'évolution du système pas à pas dans le temps : une fois calculée, la configuration actuelle κ_t est prise comme configuration de référence pour calculer la configuration κ_{t+dt}.

Section 2

Tenseur gradient des vitesses

2

Tenseur gradient des vitesses — Dérivation

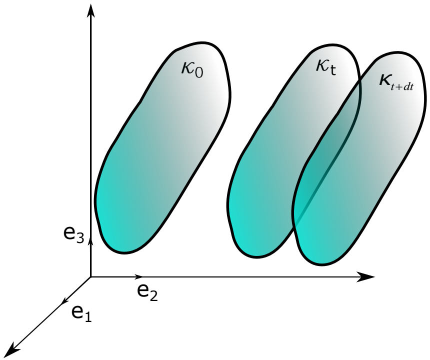
Pour décrire la cinématique du milieu continu, on écrit les équations en vitesse. Soit $\overrightarrow{dx}$ un vecteur élémentaire dans κ_t. On calcule sa variation temporelle $\dot{\overrightarrow{dx}}$ lors du passage de κ_t à κ_{t+dt}.

En utilisant artificiellement la configuration initiale κ_0 :

$$\overrightarrow{dx} = \overline{\overline{F}} \cdot d\overrightarrow{X}$$

$$\dot{\overrightarrow{dx}} = \frac{d(\overline{\overline{F}} \cdot d\overrightarrow{X})}{dt} = \overline{\overline{\nabla}}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)\overline{\overline{F}}^{-1}\overrightarrow{dx} = \overline{\overline{\nabla V}}(\overrightarrow{X}, t)\overline{\overline{F}}^{-1}\overrightarrow{dx}$$

Tenseur gradient des vitesses — Définition



Comme $\overrightarrow{V}(\overrightarrow{X},t) = \overrightarrow{V}(\overrightarrow{x},t)$, en multipliant par $\overline{\overline{F}}^{-1}$ on obtient :

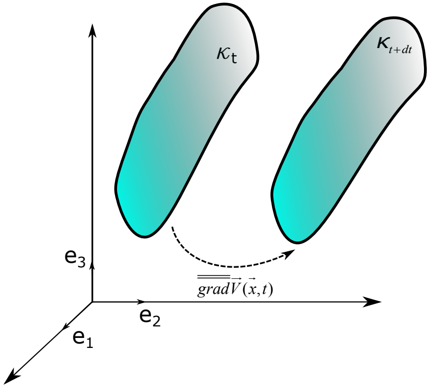
$$\overline{\overline{\nabla V}}(\overrightarrow{X},t)\overline{\overline{F}}^{-1} = \overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{V}(\overrightarrow{x},t)$$

Résultat clé

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{dx}} = \overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{V}(\overrightarrow{x},t)\cdot\overrightarrow{dx}}$$

$\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{V}(\overrightarrow{x},t)$ est le **tenseur gradient eulérien des vitesses**. Il joue, en description eulérienne, le rôle que joue $\overline{\overline{F}}$ en description lagrangienne.

Rôle du tenseur gradient des vitesses



$\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\ \overrightarrow{V}$ permet le passage instantané de la configuration actuelle κ_t à la configuration κ_{t+dt}.

Comparaison Lagrange / Euler

- **Lagrange** : $\overline{\overline{F}}$ relie κ_0 à κ_t
- **Euler** : $\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\ \overrightarrow{V}$ relie κ_t à κ_{t+dt}

Section 3

Tenseur taux des déformations

3

Tenseur taux des déformations — Dérivation

On calcule la dérivée particulaire du produit scalaire de deux vecteurs élémentaires $\overrightarrow{dx}$ et $\overrightarrow{dx'}$ appartenant à κ_t :

$$\begin{aligned}\dot{\overline{\overrightarrow{dx'} \cdot \overrightarrow{dx}}} &= \dot{\overrightarrow{dx}} \cdot \overrightarrow{dx'} + \overrightarrow{dx} \cdot \dot{\overrightarrow{dx'}} \\ &= \overrightarrow{dx} \cdot \left({}^T\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\, \overrightarrow{V} + \overline{\overline{\mathrm{grad}}}\, \overrightarrow{V} \right) \cdot \overrightarrow{dx'} = 2\overrightarrow{dx} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \overrightarrow{dx'}\end{aligned}$$

Tenseur taux des déformations

$$\boxed{\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\, \overrightarrow{V} + {}^T\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\, \overrightarrow{V}\right)}$$

$\overline{\overline{D}}$ est la **partie symétrique** du tenseur gradient des vitesses. Il caractérise l'évolution de la métrique rapportée à κ_t (configuration de référence instantanée).

Taux de variation des longueurs

Soit $\overrightarrow{dx} = l\overrightarrow{\tau}$ un vecteur élémentaire de direction $\overrightarrow{\tau}$ et de longueur l.

$$\overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{dx} = l^2 \;\Rightarrow\; \dot{\overline{\overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{dx}}} = 2l\dot{l}$$

Or :

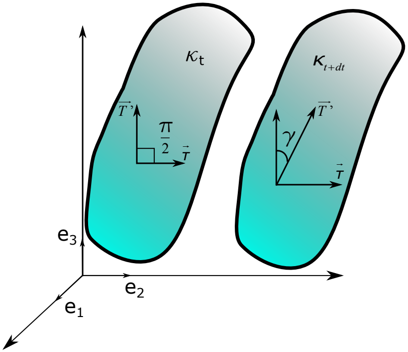
$$\dot{\overline{\overrightarrow{dx} \cdot \overrightarrow{dx}}} = 2\overrightarrow{dx} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \overrightarrow{dx} = 2l^2\overrightarrow{\tau} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \overrightarrow{\tau}$$

Taux de variation de longueur

$$\boxed{\frac{\dot{l}}{l} = \overrightarrow{\tau} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \overrightarrow{\tau}}$$

La diagonale de $\overline{\overline{D}}$ donne les **taux d'allongement** dans les directions principales.

Taux de glissement de deux directions



Soient $\vec{\tau}$ et $\vec{\tau'}$ deux directions orthogonales au point $\vec{x}$ à l'instant t.

À $t' = t + dt$, elles forment un angle $\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$, soit :

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin(\gamma)$$

Taux de glissement

Comme $\gamma = 0$ à l'instant t :

$$\boxed{\dot{\gamma} = 2\vec{\tau} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \vec{\tau'}}$$

Taux de variation de volume

Taux de variation de volume

$$\boxed{\frac{\dot{dv}}{dv} = \operatorname{div} \overrightarrow{V} = \frac{\dot{J}}{J}}$$

Cas d'un fluide incompressible

Le taux de variation de volume est nul, d'où :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$$

Section 4

Tenseur taux de rotation

4

Tenseur taux de rotation

La partie **antisymétrique** du tenseur gradient des vitesses est :

$$\overline{\overline{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{V} - {}^{T}\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{V}\right)$$

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ associé est appelé **vecteur taux de rotation** ou **vecteur tourbillon**.

Décomposition de $\dot{\overrightarrow{dx}}$

$$\dot{\overrightarrow{dx}} = \overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dx} = (\overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}) \cdot \overrightarrow{dx} = \overline{\overline{D}} \cdot \overrightarrow{dx} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{dx}$$

Interprétation physique du taux de rotation

Soient $\overrightarrow{dx_i}$, $i = 1, 2, 3$ les directions principales de $\overline{\overline{D}}$ et d_i les valeurs propres associées. Alors :

$$\dot{\overrightarrow{dx_i}} = d_i \overrightarrow{dx_i} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{dx_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

Interprétation

La vitesse $\dot{\overrightarrow{dx_i}}$ entre t et $t + dt$ se décompose en :

- un **allongement unitaire** $d_i\, dt$
- une **rotation instantanée** $\overrightarrow{\Omega}\, dt$

Ceci justifie la dénomination de $\overrightarrow{\Omega}$: vecteur rotation ou tourbillon.

Section 5

Dérivée particulaire

5

Dérivée particulaire — Introduction

L'analyse nécessite le calcul des taux de variation des quantités rattachées à des particules en mouvement. On définit pour cela un outil mathématique : la **dérivée particulaire** (ou dérivée matérielle).

Il s'agit de caractériser la variation au cours du temps d'une grandeur attachée à une particule ou à un ensemble de particules suivies dans leur mouvement.

En un point donné ($\overrightarrow{x}$ fixé), la grandeur varie en fonction du temps, et à un instant donné (t fixé) elle dépend du point considéré.

Exemple intuitif — Température en voiture

Trajet Sétif → Alger

La variation de la température extérieure dépend de deux facteurs :

1. **Variation temporelle** : la température varie dans un même lieu au cours de la journée ($\overrightarrow{x}$ figé).
   Ex. : $T(9\text{h}) \neq T(16\text{h})$ à Sétif $\Rightarrow T = T(t)$
2. **Variation spatiale** : vous vous déplacez et passez en des endroits de température différente à un même instant (t figé). Cette dépendance par rapport à $\overrightarrow{x}$ dépend de la vitesse à laquelle vous roulez.

Formulation schématique

$$\text{Variation de } T = \underbrace{\text{variation due à } t}_{\partial T/\partial t} + \underbrace{\text{variation due au mouvement}}_{\text{terme convectif}}$$

Dérivée particulaire — Scalaire

Soit $f = f(\overrightarrow{x}, t)$ avec $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{X}, t)$. Par dérivation en chaîne :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}$$

Dérivée particulaire d'un scalaire

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{V}}$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial t}$: variation de f au point $\overrightarrow{x}$ fixé (particule immobile, $\overrightarrow{V} = 0$)
- $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{V}$: **terme de convection** dû au transport de la particule par le mouvement

Vecteur $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}, t)$

$$\frac{d\overrightarrow{f}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{f}}{\partial t} + \overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{V}$$

Composante i :

$$\frac{df_i}{dt} = f_{i,t} + f_{i,j}V_j$$

Tenseur $\overline{\overline{f}}(\overrightarrow{x}, t)$

$$\frac{d\overline{\overline{f}}}{dt} = \frac{\partial \overline{\overline{f}}}{\partial t} + \overline{\overline{\overline{\mathrm{grad}}}}\,\overline{\overline{f}}\cdot\overrightarrow{V}$$

Composante ij :

$$\frac{df_{ij}}{dt} = f_{ij,t} + f_{ij,p}V_p$$

Accélération

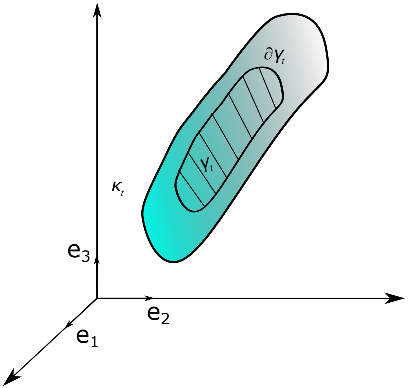
$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + \overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{V}$$

Remarque (description lagrangienne)

En description lagrangienne : $\overrightarrow{X}$ toujours figé donc

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

Dérivée particulaire d'une intégrale de volume



Soit $f(\overrightarrow{x}, t)$ une densité volumique et l'intégrale :

$$I = \int_{\gamma_t} f(\overrightarrow{x}, t)\, dv$$

Exemple : si $f = \rho(\overrightarrow{x}, t)$, alors I est la masse M du volume γ_t.

La difficulté réside dans le fait que le domaine γ_t **varie dans le temps**. On ramène l'intégrale à la configuration de référence (domaine fixe γ_0), puis on revient aux variables d'Euler.

Dérivée particulaire — Cas continu (calcul)

Avec $dv = J\, dv_0$ et le domaine γ_0 fixe :

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_0} \frac{d(fJ)}{dt}\, dv_0 = \int_{\gamma_0} \left[\frac{df}{dt} J + \dot{J} f \right] dv_0$$

Or $\dot{J} = J \operatorname{div} \overrightarrow{V}$, donc en revenant à γ_t :

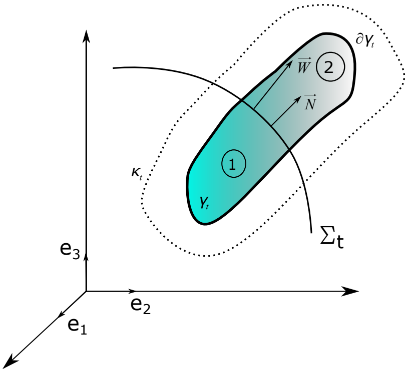
$$\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_t} \frac{df}{dt}\, dv + \int_{\gamma_t} f \operatorname{div} \overrightarrow{V}\, dv$$

Formule de Reynolds (cas continu)

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_t} \frac{\partial f}{\partial t}\, dv + \int_{\partial\gamma_t} f\, \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}\, ds}$$

- $\displaystyle\int_{\gamma_t} \frac{\partial f}{\partial t}\, dv$: variation temporelle de I
- $\displaystyle\int_{\partial\gamma_t} f\, \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}\, ds$: terme de convection

Dérivée particulaire — Cas discontinu



$f(\vec{x}, t)$ est discontinue à travers une surface Σ_t de vecteur normal $\vec{N}$ (orienté du côté 1 vers le côté 2) se déplaçant à la vitesse $\vec{W}$.

$$[\![f]\!] = f_2 - f_1, \quad I = I_1 + I_2$$

Formule de Reynolds généralisée

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_t} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}(f\vec{V}) \right] dv + \int_{\Sigma_t} [\![f(\vec{V} - \vec{W})]\!] \cdot \vec{N} \, d\Sigma$$

$(\vec{V} - \vec{W})$: vitesse relative de la particule par rapport à la surface de discontinuité Σ_t.

Merci de votre attention !

Mr. ZENNADI Karim

Enseignant Chercheur — ENP

MMC