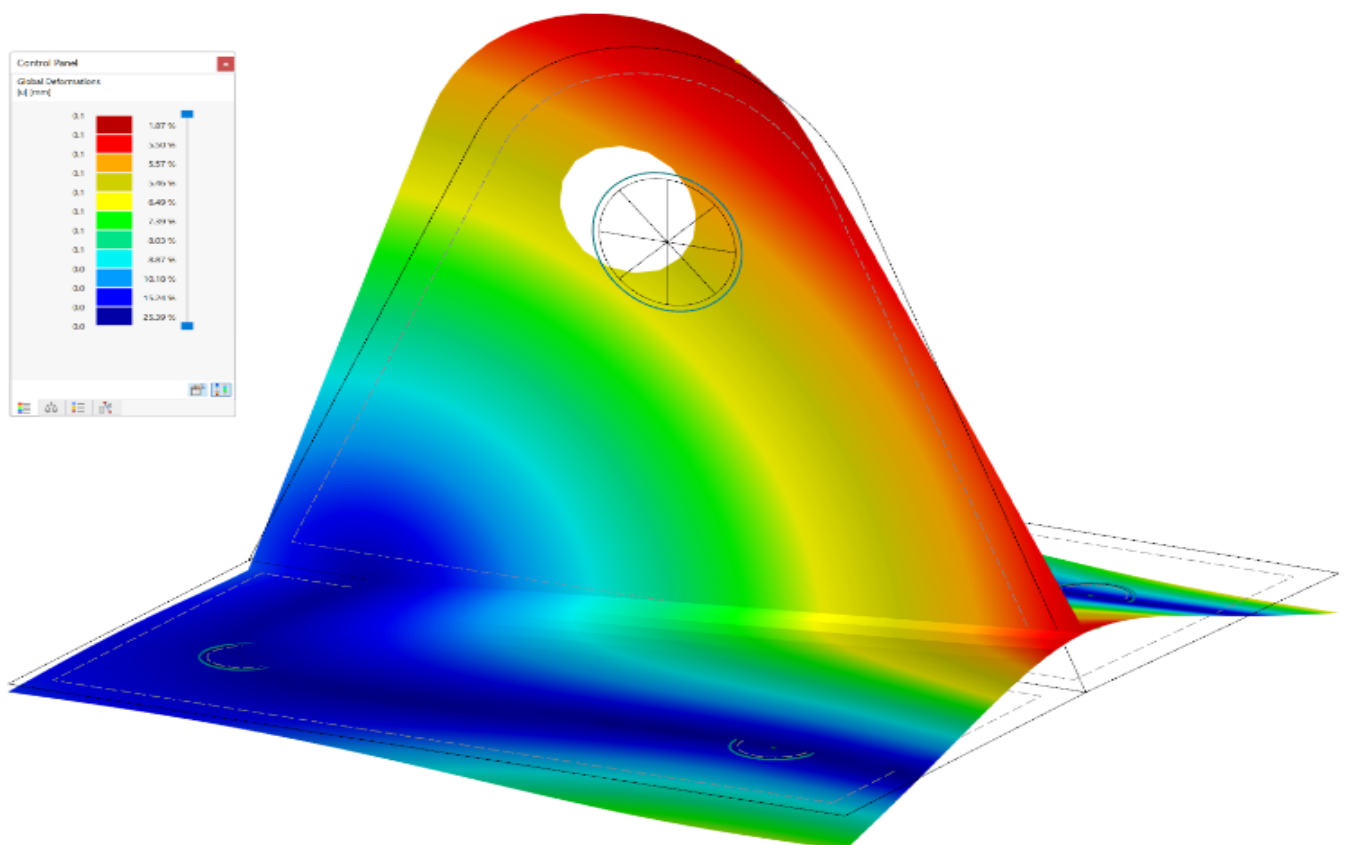
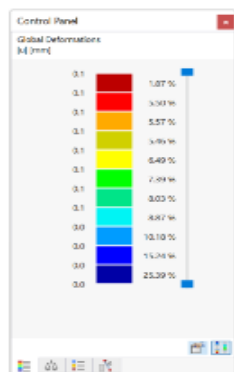


Mécanique des Milieux Continus

Concepts de base

Mr. Karim Zennadi



Avant–propos

La mécanique des milieux continus étudie la déformations des corps solides ou fluides à l'échelle de quelques μm jusqu'à l'échelle de quelques km . L'hypothèse de travail principale est contenue dans le titre du livre. On suppose que la densité d'atomes est assez élevée pour que nous n'ayons pas à nous préoccuper de l'interaction entre atomes ou molécules.

La mécanique des milieux continus est basée sur une formulation axiomatique des lois de la mécanique (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et la puissance). A partir de cette formulation axiomatique, un formalisme mathématique rigoureux amène à une description rigoureuse des déformations, contraintes (forces internes dans un solide) et à la description des lois de comportement des solides et des fluides.

Dans ce livre de cours, nous nous limiterons au comportement élastique réversible des solides. Ce comportement décrit assez bien l'utilisation des structures dans la vie courante. Cependant la production des matériaux et la mise en forme des structures font appel à des comportements plastiques, élasto-plastiques et élasto-viscoplastiques.

Le cours de mécanique des milieux continus est basé sur un formalisme mathématique lourd. Cependant, les applications de la mécanique des milieux continus font parti de la vie quotidienne de tout ingénieur en Mécanique.

À la fin de chaque chapitre, on trouvera des exercices corrigés, de longueur variable, permettant de passer en revue de nombreux points du cours.

Ce cours écrit a été composé en s'appuyant principalement sur les ouvrages suivants, qui offrent des présentations résolument modernes, concises et rigoureuses de la Mécanique des Milieux Continus :

- Erick Ringot, Polycopie de Mécanique des Milieux Continus élasticité linéaire, Université Paul Sabatier, Toulouse 3, 2010.
- Golay Frédéric - Bonelli Stéphane, Mécanique des Milieux Continus, ISITV, 2011.

- Ziad Moumni, Mécanique des Milieux Continus, ENSTA, 2005.
- Jean Salençon, Mécanique des Milieux Continus Tome 1 : Concepts généraux, École Polytechnique, Septembre 2007

Rédiger un polycopie sur la mécanique des milieux continus pour un cours de tronc commun cycle ingénieur n'est pas une tâche aisée. En plus de mon expérience d'enseignant, J'ai été grandement aidé dans cette entreprise par différents collègues qui ont pris la peine de me donner leur avis sur ce document.

Il subsiste cependant encore de nombreux défauts dans ce texte. Je remercie le lecteur de me les signaler.

Dédicaces



Je souhaite, à travers ce travail, rendre un profond hommage à mon frère,

RAOUF ZENNADI

qui nous a quittés en janvier 2024.

Mon cher frère,

Je garde en moi l'émotion bouleversante de ton départ.

*Ce fut à la fois un vide immense qui s'est creusé,
et le douloureux soulagement de te savoir enfin apaisé.*

*Il est difficile de l'admettre, mais c'est la vérité :
te voir souffrir m'était devenu insupportable.*

Je voulais te retenir, même si, au fond de moi, j'en connaissais l'issue.

*Tu es parti bien trop tôt, laissant un silence assourdissant,
Mais l'éclat de ton sourire reste notre plus belle récompense.*

*M. Karim Zennadi, Novembre 2024.
karimzennadi@gmail.com.*

Table des matières

I	INTRODUCTION A LA MMC	
1	Éléments de calcul tensoriel	19
1.1	Introduction au tenseurs	19
1.1.1	Introduction	19
1.1.2	L'ordre d'un tenseur	19
1.2	Vecteurs et tenseurs	20
1.2.1	Vecteur	20
1.2.2	Application linéaire de ξ dans ξ	21
1.2.3	Formes bilinéaires	21
1.2.4	Tenseurs	22
1.2.5	Changement de repère	22
1.3	Permutations et déterminants	24
1.3.1	Les symboles de permutation dit de Lévi-Civita	24
1.3.2	Déterminant d'une matrice	24
1.3.3	Adjoint d'un tenseur antisymétrique	24
1.4	Calcul vectoriel et analyse vectorielle	25
1.4.1	Calcul vectoriel	25
1.4.2	Analyse vectorielle	25
1.4.3	Transformation d'intégrales	26
1.5	Formules essentielles en Mécanique des Milieux Continus	26
1.5.1	Coordonnées cartésiennes orthonormées	26
1.5.2	Coordonnées cylindriques	27
1.5.3	Coordonnées sphériques	28

2	Introduction à la Mécanique des Milieux Continus	31
2.1	Quelques définitions	31
2.2	Positionnement de la MMC au sein de la mécanique	31
2.3	Hypothèses principales de la MMC	32
2.4	Typologie des milieux continus	34
2.5	Applications de la MMC	34
2.6	Esprit du cours	35

II

CINÉMATIQUE

3	Le milieu continu : une modélisation	39
3.1	Échelle, modélisation, validation	39
3.2	Les concepts et leur formulation	40
3.2.1	L'idée directrice	40
3.2.2	Configurations du système	40
3.3	Points de vue de Lagrange et d'Euler	41
3.4	Description lagrangienne	41
3.4.1	Définition	41
3.4.2	Hypothèses de continuité	42
3.4.3	Pertinence du modèle : affaiblissement des hypothèses de continuité	43
3.4.4	Interprétation physique de la description lagrangienne : trajectoires	43
3.4.5	Lignes d'émission	44
3.4.6	Vitesse d'une particule	45
3.5	Description eulérienne	46
3.5.1	Définition	46
3.5.2	Détermination des trajectoires	47
3.5.3	Lignes de courant	48
3.5.4	Mouvements stationnaires (ou permanents)	49
3.6	Exercice	50
3.6.1	Ennonce	50
3.6.2	Solution	50
4	Étude des Déformation du milieu Continu	55
4.1	Introduction	55
4.2	Gradient d'une transformation	56
4.2.1	Tenseur gradient d'une transformation	56
4.2.2	Transport convectif d'un vecteur	59
4.3	Tenseur des dilatations	61
4.3.1	Tenseur des dilatations	61
4.3.2	Dilatation dans une direction	62
4.3.3	Glissement de deux directions orthogonales	64
4.3.4	Évolution des volumes	64
4.3.5	Décomposition polaire	65

4.4	Tenseurs des déformations	67
4.4.1	Tenseur de Green-Lagrange	67
4.5	Formulation en fonction des déplacements	69
4.5.1	déplacements	69
4.5.2	Le tenseur gradient de transformation	69
4.5.3	Le tenseur de dilatation de Cauchy	70
4.5.4	Le tenseur de déformation de Green-Lagrange	70
4.6	Hypothèse des petites déformations	70
4.6.1	Conséquences	70
4.7	Hypothèse des petites transformations	70
4.7.1	Conséquences	71
4.8	Conditions de compatibilité	71
4.8.1	Unicité du champ de déplacement	71
4.8.2	Existence d'un champ de déplacement : conditions de compatibilité	72
4.9	Exercice	73
4.9.1	Ennonce	73
4.9.2	Solution	74
5	Cinématique du milieu continu	77
5.1	Introduction	77
5.2	Tenseur gradient des vitesses	77
5.3	Tenseur taux des déformations	79
5.3.1	Taux de variation des longueurs	79
5.3.2	Taux de glissement de deux direction	80
5.3.3	Taux de variation de volume	80
5.4	Tenseur Taux de rotation	81
5.5	Dérivée particulaire	81
5.5.1	Notion intuitive	81
5.5.2	Dérivé particulaire d'une fonction de points	82
5.5.3	Dérivé particulaire d'une intégrale de volume	83
5.6	Exercice	86
5.6.1	Ennonce	86
5.6.2	Solution	87

III

EFFORTS DANS LES MILIEUX CONTINUS

6	Conservation de la masse : équation de continuité	93
6.1	Introduction	93
6.2	Le premier Cas	94
6.3	Le second Cas	95
7	Contraintes	97
7.1	Objectif	97

7.2	Interactions - cadre Newtonien	97
7.2.1	Espace	97
7.2.2	Temps	97
7.2.3	Origine des forces	98
7.2.4	Principe fondamental	98
7.2.5	Action-réaction	99
7.3	Champ de contrainte	100
7.3.1	Partitionnement d'un solide	100
7.3.2	Hypothèse sur la nature des forces internes	101
7.3.3	Contrainte normale et contrainte de cisaillement	102
7.4	Propriétés des contraintes	102
7.4.1	Tenseur des contraintes	102
7.4.2	Équilibre dynamique d'un domaine solide	103
7.5	Diagonalisation du tenseur des contraintes	106
7.5.1	Contraintes principales	106
7.5.2	Directions principales de contrainte	106
7.5.3	Invariants du tenseur des contraintes	107
7.5.4	Composantes sphérique et déviatorique d'un tenseur contrainte	107
7.6	Représentation graphique d'un état de contrainte	108
7.6.1	Tricercle de MOHR	108
7.6.2	Cercle de MOHR	110
7.7	Conditions aux limites du solide exprimées en contraintes	113
7.8	Exercice	114
7.8.1	Ennonce	114
7.8.2	Solution	114

IV

ÉLASTICITÉ

8	Loi de comportement élastique linéaire	121
8.1	Introduction	121
8.2	Hypothèses	123
8.2.1	Expérimentation	123
8.2.2	Comportement de l'acier (test de traction)	123
8.3	Formulations de la loi élastique linéaire	124
8.3.1	Loi de HOOKE-DUHAMEL	124
8.3.2	Loi de GABRIEL LAMÉ	126
8.3.3	Relations entre coefficients	126
8.3.4	Formulations croisées	127
9	Méthodes de résolution des problèmes d'élasticité	129
9.1	Problème d'élasticité	129
9.1.1	Position du problème	129
9.1.2	Objectif	130
9.1.3	Récapitulation des équations disponibles	130

9.2	Méthode de NAVIER	132
9.2.1	Principe	132
9.2.2	Équations	132
9.2.3	Champ de déplacement cinématiquement admissible	133
9.3	Méthode de BELTRAMI-MITCHEL	133
9.3.1	Principe	133
9.3.2	Équations	133
9.3.3	Cas des forces de volume uniformes	134
9.3.4	Champ de contrainte statiquement admissible	135
9.4	Unicité de la solution d'un problème d'élasticité	135
9.4.1	Principe de superposition	135
9.4.2	Unicité de la solution	135
9.4.3	Champ CA et champ SA associés	135
9.5	Méthode de RITZ	135
9.5.1	Théorème	136
9.5.2	Application	137
9.5.3	Méthode des éléments finis	138
9.6	Élasticité bidimensionnelle	139
9.6.1	Forme des tenseurs - tenseurs réduits	140
9.6.2	Équation de compatibilité	141
9.6.3	Trace des tenseurs	142
9.6.4	Équilibre	142
9.6.5	Relation contraintes - déformations	142
9.6.6	Énergie volumique	143
9.6.7	Équations de BELTRAMI	143
9.6.8	Fonction de AIRY	144
9.7	Élasticité axisymétrique	146
9.8	Exercice	146
9.8.1	Ennonce	146
9.8.2	Solution	147
	Bibliographie	151
	Index	153

Table des figures

3.1	formage à froid ou à chaud	39
3.2	Configurations du système.	41
3.3	Poinçonnement asymétrique d'un bloc de plasticine	44
3.4	Écoulement autour d'une plaque plane.	44
3.5	Trajectoire d'une particule.	45
3.6	Ligne d'émission (en pointillé)	45
3.7	Visualisation par colorant des lignes d'émission issues du bord d'attaque d'une aile delta.(image ONERA.)	46
3.8	Description Eulerienne.	47
3.9	Lignes de courant à l'instant T (en pointillé : trajectoires de deux particules)	49
3.10	Visualisation par plan laser des lignes de courant de l'écoulement transverse autour du Concorde.(image ONERA.)	49
3.11	Écoulement autour d'une maquette de motrice à grande vitesse.(image ONERA.)	50
3.12	Trajectoire de trois point A, B et C pour $t = 0..5s$	52
3.13	ligne d'émission relative à l'origine et a l'instant $T = 3$	53
3.14	lignes de courants a l'instant $\tau = 3$	54
4.1	Réseau de lignes dessinées sur un solide avant indentation et après indentation par un cylindre.	55
4.2	Configuration initiale et actuelle d'un solide déformé.	56
4.3	Exemple de transformation particulière : glissement simple avec translation.	58
4.4	Indentation d'un solide par un cylindre infinie en configuration non déformée prise comme référence	59
4.5	Indentation d'un solide par un cylindre infinie en configuration non déformée prise comme configuration déformée	59
4.6	Passage de la représentation pour des quantités finies à des quantités différentielles.	60
4.7	transport d'un vecteur élémentaire.	60
4.8	Indentation d'un solide par un cylindre infinie. Configuration de référence et configuration déformée.	61

4.9	Evolution des longueurs.	63
4.10	Evolution des angles.	64
4.11	Evolution des volumes.	65
4.12	Transformation de la base principale du tenseur de dilatation de Cauchy.	66
4.13	Transformation de la base principale du tenseur de dilatation de Cauchy.	67
4.14	Déplacement d'un point matériel.	69
4.15	Variation du volume $\gamma(t)$ en fonction du temps	74
5.1	Cinématique du milieu continu.	78
5.2	Définition du tenseur gradient des vitesses.	79
5.3	Taux de glissement.	80
5.4	Dérivée particulaire d'une intégrale de volume.	83
5.5	Présence d'une discontinuité.	85
6.1	Masse d'un milieu continu.	93
6.2	Présence d'une discontinuité.	95
7.1	Théorème fondamental.	98
7.2	solide considéré comme l'union de ses deux parties.	99
7.3	Solide décomposé en deux parties.	100
7.4	Solide soumis à des forces.	100
7.5	Section du solide.	101
7.6	élément de volume tétraédrique.	103
7.7	sous-domaine extrait d'un solide.	104
7.8	réciprocité des contraintes de cisaillement.	106
7.9	contrainte principale et direction principale de contrainte.	106
7.10	contrainte normale et contrainte de cisaillement.	109
7.11	tricerple de MOHR (pour les contraintes).	110
7.12	état plan de contrainte (cas du plan perpendiculaire à l'axe III).	111
7.13	cerple de MOHR des contraintes.	112
7.14	vecteurs normaux et tangents.	112
7.15	construction du cerple de MOHR lorsque les contraintes principales sont inconnues.	113
7.16	construction du cerple de MOHR.	116
8.1	Courbe de traction.	122
8.2	Courbe déformation - nombre de cycles.	123
9.1	Données d'un problème d'élasticité.	129
9.2	Méthodologie de résolution d'un problème d'élasticité.	132
9.3	Travail versus potentiel d'une force - cas du ressort.	137
9.4	Maillage d'une coque.	139
9.5	États plans de déformation et de contrainte.	140
9.6	Exemple de problème axisymétrique.	146
9.7	problème d'élasticité.	147
9.8	Section du Massif.	148

Préambule

Acquisition de compétences

La mécanique des milieux continus, l'élasticité linéaire en particulier, est à l'origine de bon nombre de théories mathématiques venant en support à la construction (génie mécanique ou génie civil). Le but de ce cours est de permettre l'acquisition de nouvelles compétences par l'étudiant qui sera à même de comprendre le vocabulaire, les concepts et les méthodes mis en œuvre dans les codes de calcul ou les règles de calcul internationales. Les premiers outils maîtrisés par tout bon ingénieur sont ainsi mis à la portée des étudiants de Génie Mécanique.

Contenu

L'objet de la mécanique des milieux continus (**MMC**) est l'étude du comportement de milieux continus qui respectent l'hypothèse de continuité. Ce cours de 1^{ère} année Ingénieur Génie mécanique est volontairement restreint à l'étude des solides élastiques, dans l'hypothèse des petites perturbations.

Globalement, le cours aborde les notions suivantes :

1. La cinématique explique ce qu'est l'hypothèse de continuité et traite des déplacements et des déformations des solides ;
2. La statique aborde les questions de forces internes et introduit le concept de contraintes et leurs propriétés ;
3. Les lois de comportement des matériaux établissent des ponts entre les contraintes et les déformations. La loi élastique des milieux homogènes isotropes est détaillée ;
4. Ce qu'est un problème de mécanique des milieux continus et les méthodes de résolution en élasticité.

Prérequis**Mathématiques**

Espaces vectoriels et affines. Calcul matriciel : matrice, polynôme caractéristique, valeurs et vecteurs propres. Géométrie Euclidienne élémentaire : triangle rectangle, cercle, trigonométrie. Produit vectoriel, produit scalaire. Équation et représentation paramétrique d'une courbe et d'une surface. Coordonnées cartésiennes et cylindriques. Fonction, dérivée. Fonctions de plusieurs variables, dérivée partielle, différentielle. Fonctions vectorielles, analyse vectorielle.

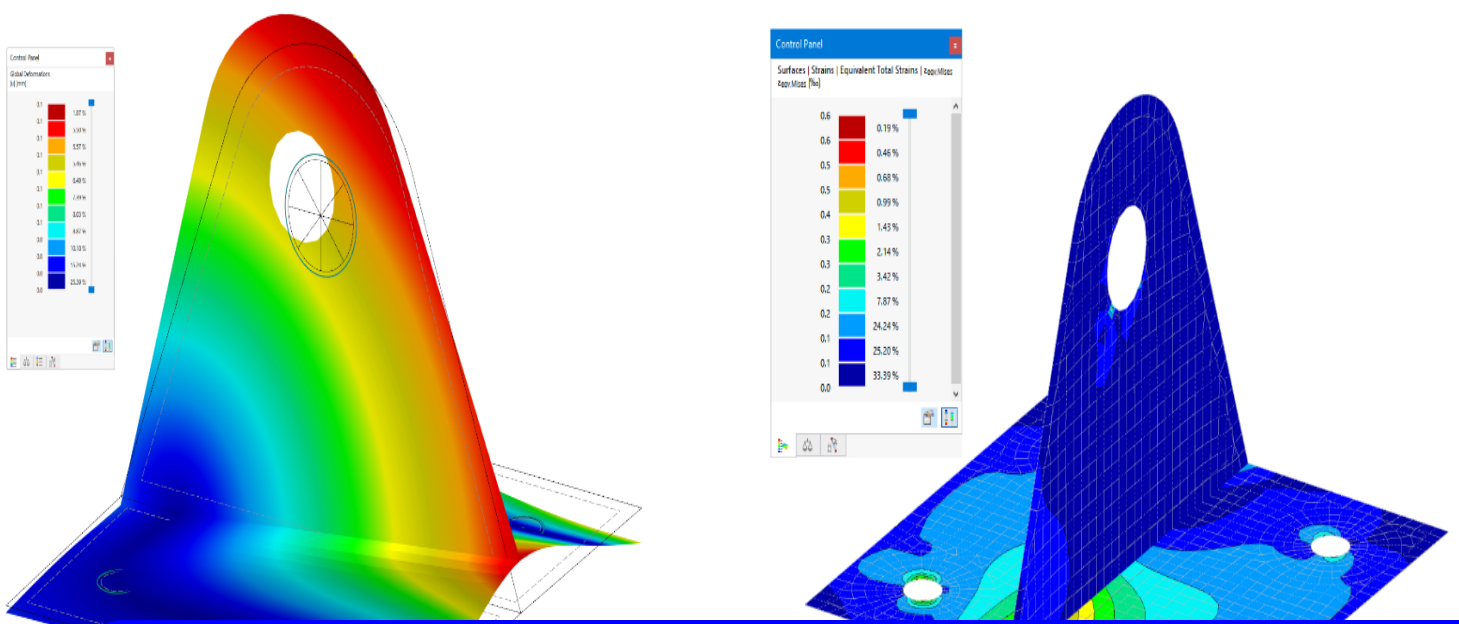
Mécanique

Force, moment d'une force, torseur. Mécanique du solide indéformable : torseur cinématique, torseur dynamique. Principe fondamental de la dynamique. Statique.



INTRODUCTION A LA MMC

1	Éléments de calcul tensoriel	19
1.1	Introduction au tenseurs	
1.2	Vecteurs et tenseurs	
1.3	Permutations et déterminants	
1.4	Calcul vectoriel et analyse vectorielle	
1.5	Formules essentielles en Mécanique des Milieux Continus	
2	Introduction à la Mécanique des Milieux Continus	31
2.1	Quelques définitions	
2.2	Positionnement de la MMC au sein de la mécanique	
2.3	Hypothèses principales de la MMC	
2.4	Typologie des milieux continus	
2.5	Applications de la MMC	
2.6	Esprit du cours	



1. Éléments de calcul tensoriel

La mécanique des milieux continus fait un usage intensif des champs scalaires, vectoriels et tensoriels. Ces outils mathématiques indispensables permettent non seulement d'établir des résultats fondamentaux indépendamment du référentiel choisi, mais en outre, confèrent aux formules qui les expriment une concision remarquable. Grâce à cela, on peut porter son attention sur les phénomènes physiques qu'elles représentent plutôt que sur les équations elles-mêmes. Les scalaires, vecteurs et tenseurs ont en effet la propriété d'être invariant lors d'un changement de base. C'est ainsi que grâce à ces quantités on peut écrire les équations de la mécanique de manière intrinsèque c'est à dire indépendamment de la base choisie. Dans ce cours, nous n'aurons pas recours à la forme la plus complète du calcul tensoriel ; nous n'utiliserons que des systèmes de coordonnées orthogonales, éventuellement curvilignes (par exemple le système de coordonnées cylindriques ou sphériques), ce qui permet des simplifications considérables sans introduire de restrictions trop gênantes. En outre, tout les vecteurs et tenseurs considérés seront toujours à composantes réelles.

1.1 Introduction au tenseurs

1.1.1 Introduction

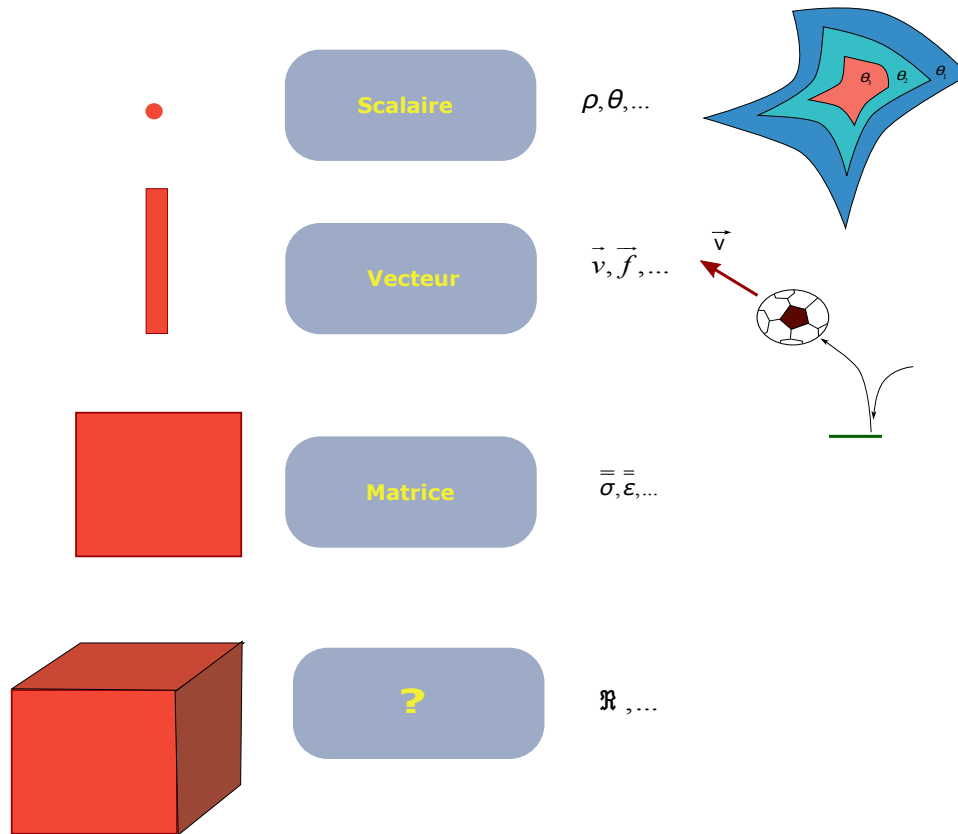
Un tenseur est une entité algébrique avec des composantes varies qui généralise le concept de **scalaire**, **vecteur** et **matrice**.

- Beaucoup de quantités physiques sont mathématiquement représenté comme tenseurs.
- Les tenseurs sont indépendants de tous système de référence mais, par nécessité, sont représentés en un par les composantes de leurs matrices.
- Les composantes d'un tenseur sont dépendantes du système de référence choisi et varient avec lui.

1.1.2 L'ordre d'un tenseur

L'ordre d'un tenseur est donné par le nombre d'indices dont on a besoin.

- Scalaire : zéro dimension $\alpha = 3.14$



— Vecteur : une dimension $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.3 \\ 0.8 \end{pmatrix}$.

— Matrice : 2^{eme} ordre : 2 dimensions $\bar{E} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 1.3 \\ 1.6 & 2.4 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 5.8 \end{pmatrix}$.

— 3^{eme} ordre : 3 dimension ...

1.2 Vecteurs et tenseurs

1.2.1 Vecteur

Dans un espace euclidien ξ à trois dimensions, soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée. Un vecteur \vec{V} est représenté par ses composantes V_1, V_2, V_3

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 V_i \vec{e}_i \quad (1.1)$$

En utilisant la convention de sommation, ou **convention d'Einstein**, on écrit

$$\vec{V} = V_i \vec{e}_i \quad (1.2)$$

où, chaque fois qu'un indice est répété, il convient de faire varier cet indice de 1 à 3 et de faire la somme. Dans l'expression (1.2) l'indice i est un **indice muet**. En notation matricielle on écrira parfois

$$\vec{V} = \{ \vec{V} \} = \left\{ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{matrix} \right\} \quad (1.3)$$

et le vecteur transposé

$$\vec{V}^T = \left\{ \vec{V} \right\}^T = \left\langle \vec{V} \right\rangle = \langle V_1 \quad V_2 \quad V_3 \rangle \quad (1.4)$$

1.2.2 Application linéaire de ξ dans ξ

Soit A une application linéaire, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ Cette application est représentée par une matrice 3×3 notée $[A]$:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Si \vec{W} est un vecteur tel que $\vec{W} = A \vec{V}$ alors les composantes de \vec{W} sont données par

$$\begin{aligned} W_1 &= A_{11}V_1 + A_{12}V_2 + A_{13}V_3 \\ W_2 &= A_{21}V_1 + A_{22}V_2 + A_{23}V_3 \\ W_3 &= A_{31}V_1 + A_{32}V_2 + A_{33}V_3 \end{aligned}$$

et en utilisant les conventions de sommation où j est un indice muet

$$W_i = A_{ij}V_j \quad (1.5)$$

et en notation matricielle

$$\{W\} = [A] \{V\}$$

On définit le **symbole de Kronecker** par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.6)$$

En particulier l'application identité \vec{I} est représentée par la matrice

$$[\vec{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

autrement dit $I_{ij} = \delta_{ij}$ La composition de deux applications linéaires se traduit par le produit de leur matrice représentative, c'est-à-dire

$$C = A \circ B \quad \text{ou encore} \quad [C] = [A][B]$$

et en notation indicielle

$$C_{ij} = A_{ik}B_{kj} \quad (1.7)$$

1.2.3 Formes bilinéaires

Soit A une forme bilinéaire sur ξ c'est-à-dire une application bilinéaire de $\xi \times \xi$ dans \mathbf{R} Dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ elle est représentée par une matrice A_{ij} telle que

$$A(\vec{V}, \vec{W}) = A_{ij}V_iW_j \quad (1.8)$$

ou en notation matricielle

$$A(\vec{V}, \vec{W}) = \langle V \rangle [A] \{W\}$$

En particulier, la forme bilinéaire représentée dans toute base par le symbole de Kronecker est le produit scalaire. Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée, alors

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

et le produit scalaire de deux vecteurs est donné par

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = V_i \vec{e}_i \cdot W_j \vec{e}_j = V_i W_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} V_i W_j = V_i W_i$$

ou en notation matricielle

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \langle V \rangle \{W\}$$

1.2.4 Tenseurs

Tenseur du second ordre

Un tenseur du second ordre T est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur \vec{V} de l'espace euclidien un vecteur \vec{W} de ce même espace.

$$\vec{W} = T(\vec{V})$$

Cet opérateur peut être représenté par une matrice 3x3, notée $[T]$ ou $\overline{\overline{T}}$ ou $\overline{\overline{T}}$, telle que

$$W_i = T_{ij} V_j$$

ou en notation matricielle

$$\{\vec{W}\} = [\overline{\overline{T}}] \{\vec{V}\}$$

ou

$$\vec{W} = \overline{\overline{T}} \vec{V}$$

- Un tenseur est dit **symétrique** si $T_{ij} = T_{ji}$
- Un tenseur est dit **antisymétrique** si $T_{ij} = -T_{ji}$
- Un tenseur est dit **isotrope** si $T_{ij} = t \delta_{ji}$
- On peut toujours décomposer un tenseur en une partie symétrique et antisymétrique

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}^{\text{sym}} + \overline{\overline{A}}^{\text{asym}}, \overline{\overline{A}}^{\text{sym}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{A}}^T), \overline{\overline{A}}^{\text{asym}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{A}} - \overline{\overline{A}}^T)$$

Produit tensoriel

On définit le produit tensoriel du vecteur \vec{U} par le vecteur \vec{V} , noté $\vec{U} \otimes \vec{V}$, comme le tenseur d'ordre deux, défini par la forme bilinéaire qui aux vecteurs \vec{X} et \vec{Y} fait correspondre $(\vec{U} \cdot \vec{X})(\vec{V} \cdot \vec{Y})$. Les 9 produits tensoriels $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ définissent une base de l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre deux, si bien que l'on peut écrire un tenseur T comme

$$\overline{\overline{T}} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

1.2.5 Changement de repère

Matrice de passage

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée et $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ une autre base orthonormée. On définit la matrice de passage Q telle que :

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= Q_{11} \vec{e}_1 + Q_{12} \vec{e}_2 + Q_{13} \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= Q_{21} \vec{e}_1 + Q_{22} \vec{e}_2 + Q_{23} \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= Q_{31} \vec{e}_1 + Q_{32} \vec{e}_2 + Q_{33} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

ou encore, en notations indicielles

$$\vec{e}'_i = Q_{ij} \vec{e}_j$$

et en notation matricielle

$$\{\vec{e}'\} = [Q] \{\vec{e}\}$$

Les deux bases étant orthonormées, on doit avoir

$$\delta_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = Q_{ik} \vec{e}_k \cdot Q_{jl} \vec{e}_l = Q_{ik} Q_{jl} \delta_{kl} = Q_{ik} Q_{jk}$$

ce qui montre que la matrice inverse de Q est Q^T .

Vecteurs

Soit \vec{V} un vecteur de composantes V_i dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et V'_i dans la base $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$

$$\vec{V} = V_i \vec{e}_i = V'_i \vec{e}'_i$$

En utilisant la matrice de passage

$$\vec{V} = V_i \vec{e}_i = V_i Q_{ki} \vec{e}'_k$$

soit

$$V'_k = V_i Q_{ki} \quad \text{et} \quad V_k = V'_i Q_{ik}$$

ou encore, en notation matricielle

$$\{\vec{V}'\} = [Q] \{\vec{V}\} \quad \text{et} \quad \{\vec{V}\} = [Q]^T \{\vec{V}'\}$$

Remarque : le produit scalaire est un invariant, c'est à dire que cette fonction est indépendante du repère choisi.

En notation indicielle

$$\vec{V}' \cdot \vec{W}' = V'_k W'_k = V_i Q_{ki} W_j Q_{kj} = \delta_{ij} V_i W_j = V_i W_i = \vec{V} \cdot \vec{W}$$

et en notation matricielle

$$\vec{V}' \cdot \vec{W}' = \langle \vec{V}' \rangle \{\vec{W}'\} = ([Q] \{\vec{V}\})^T [Q] \{\vec{W}\} = \langle \vec{V} \rangle [Q]^T [Q] \{\vec{W}\} = \langle \vec{V} \rangle \{\vec{W}\} = \vec{V} \cdot \vec{W}$$

Application linéaire

Soit A une application linéaire, de composantes A_{ij} dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et A'_{ij} dans la base $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ En notation indicielle

$$W'_i = A'_{ik} V'_k = Q_{ij} W_j = Q_{ij} A_{jm} V_m = Q_{ij} A_{jm} Q_{km} V'_k$$

d'où

$$A'_{ik} = Q_{ij} A_{jm} Q_{km}$$

et en notation matricielle

$$\{\vec{W}'\} = [A'] \{\vec{V}'\} = [Q] \{\vec{W}\} = [Q] [A] \{\vec{V}\} = [Q] [A] [Q]^T \{\vec{V}\}$$

soit

$$[A'] = [Q] [A] [Q]^T$$

1.3 Permutations et déterminants

1.3.1 Les symboles de permutation dit de Lévi-Civita

Soient i, j, k trois indices ayant des valeurs différentes. On dit qu'ils forment une permutation paire de 1,2,3 si l'on peut les amener dans cet ordre par un nombre pair de permutations. On dit qu'ils forment une permutation impaire de 1,2,3 si l'on peut les amener dans cet ordre par un nombre impair de permutations. Les permutations paires de 1,2,3 sont donc : (1,2,3), (3,1,2) et (2,3,1) et les permutations impaires : (2,1,3), (1,3,2) et (3,2,1). Cela étant, le symbole de permutation est défini par ε_{ijk} tel que :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si deux indices sont égaux} \\ +1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation paire} \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ forment une permutation impaire} \end{cases} \quad (1.9)$$

Ces symboles représentent le produit mixte des vecteurs de base

$$\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$$

ε_{ijk} sont les composantes d'un tenseur du troisième ordre, qui représente, par exemple, la forme trilinéaire produit mixte :

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = \varepsilon_{ijk} U_i V_j W_k$$

1.3.2 Déterminant d'une matrice

Les symboles de permutation permettent le calcul du déterminant d'une matrice par

$$\varepsilon_{ijk} \text{Det}(A) = \varepsilon_{mnp} A_{im} A_{jn} A_{kp} \quad (1.10)$$

ou encore

$$\text{Det}(A) = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnp} A_{im} A_{jn} A_{kp}$$

1.3.3 Adjoint d'un tenseur antisymétrique

Soit Ω un tenseur antisymétrique

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

on peut également lui associer le vecteur

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_{23} \\ \Omega_{31} \\ \Omega_{12} \end{Bmatrix}$$

soit

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\vec{\omega}$ est le vecteur adjoint du tenseur antisymétrique Ω .

En notation indicielle on a :

$$\begin{cases} \Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega_k \\ \omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk} \end{cases} \quad (1.11)$$

1.4 Calcul vectoriel et analyse vectorielle

1.4.1 Calcul vectoriel

Le produit vectoriel

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

s'écrit en notation indicielle

$$c_i \vec{e}_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

On peut montrer que

$$\begin{aligned} (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

1.4.2 Analyse vectorielle

On note d'une virgule la dérivée partielle, soit $,i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Les opérateurs exposés dans cette partie seront exprimés dans un repère cartésien orthonormé.

Soit une fonction scalaire

Le gradient d'une fonction scalaire est un vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = f_{,i} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{array} \right\}$$

Le laplacien d'une fonction scalaire est un scalaire

$$\Delta f = f_{,ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

Soit un vecteur

La divergence d'un vecteur est un scalaire

$$\text{Div} \vec{v} = v_{,i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Le rotationnel d'un vecteur est un vecteur

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{array} \right\}$$

Le gradient d'un vecteur est une matrice

$$\nabla \vec{v} = v_{,i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{array} \right]$$

Soit un tenseur du second ordre

La divergence d'un tenseur est un vecteur

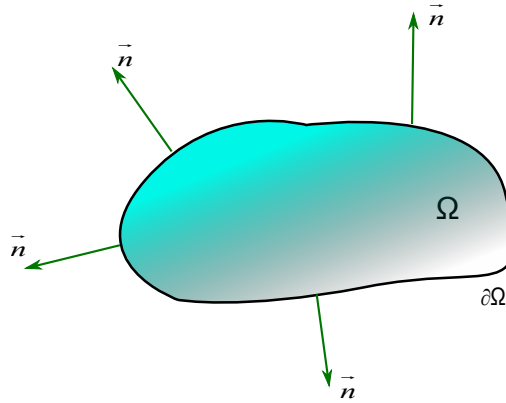
$$\text{Div} \overline{\overline{T}} = T_{ij,j} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{array} \right\}$$

1.4.3 Transformation d'intégrales

Les formules de transformations d'intégrales sont des outils mathématiques qui permettent de modifier la dimension d'un domaine d'intégration.

Les plus utilisées sont les **formules d'Ostrogradsky**, qui servent à faire correspondre une intégrale sur D (intégrale de volume) à une intégrale sur S (intégrale de surface).

Soit Ω un domaine borné et $\partial\Omega$ sa frontière, de normale \vec{n} .



Soit ϕ une fonction scalaire, alors

$$\iint_{\partial\Omega} \phi \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \, dV$$

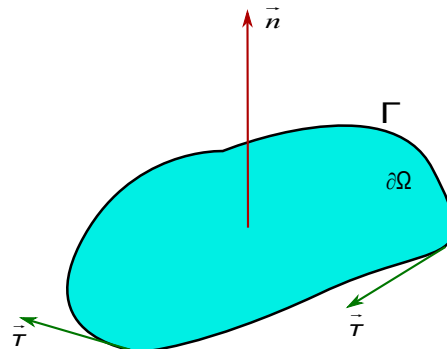
Soit \vec{A} un vecteur, alors

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \text{Div}(\vec{A}) \, dV$$

Soit $\overline{\overline{T}}$ un tenseur, alors

$$\iint_{\partial\Omega} \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\Omega} \text{Div}(\overline{\overline{T}}) \, dV$$

Soit $\partial\Omega$ un domaine plan de normale \vec{n} , de frontière Γ . Soit \vec{U} un vecteur défini sur ce domaine.



Si $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à Γ , alors

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U}) \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\Omega} \vec{U} \cdot \vec{\tau} \, dl$$

1.5 Formules essentielles en Mécanique des Milieux Continus

1.5.1 Coordonnées cartésiennes orthonormées

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

— Soit $\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$ un vecteur, alors

$$\nabla(\vec{v}) = \overline{\nabla v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = v_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

et

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i} = \operatorname{Tr}(\overline{\operatorname{grad}}(\vec{v})) = \nabla \vec{v} : \vec{I} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\Delta \vec{v} = \operatorname{div}(\nabla(\vec{v})) = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_i} \vec{e}_i = v_{i,jj} \vec{e}_i = \Delta v_x \vec{e}_x + \Delta v_y \vec{e}_y + \Delta v_z \vec{e}_z$$

— Soit f une fonction scalaire, alors

$$\overline{\operatorname{grad}}(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i = f_{,i} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right\}$$

et

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad}}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} = f_{,jj} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

— Soit $\overline{T} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$ un tenseur symétrique du deuxième ordre, alors

$$\operatorname{div}(\overline{T}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \vec{e}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} & \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} & \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} & \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} & \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} & \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} & \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

et

$$\Delta \overline{T} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T_{ij,kk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \Delta T_{xx} & \Delta T_{xy} & \Delta T_{xz} \\ \Delta T_{yx} & \Delta T_{yy} & \Delta T_{yz} \\ \Delta T_{zx} & \Delta T_{zy} & \Delta T_{zz} \end{bmatrix}$$

1.5.2 Coordonnées cylindriques

$$\overline{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overline{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{OM}}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{\partial \overline{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

$$d(\overline{OM}) = \vec{e}_r dr + r d\theta \vec{e}_\theta + \vec{e}_z dz$$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0 \end{array}$$

— Soit $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z$ un vecteur, alors

$$\overline{\operatorname{grad}}(\vec{v}) = \overline{\nabla v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{Tr}(\nabla(\vec{v})) = \nabla \vec{v} : \vec{I} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\Delta \vec{v} = \operatorname{div}(\nabla \vec{v}) = \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \vec{e}_r + \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \vec{e}_\theta + \Delta v_z \vec{e}_z$$

— Soit f une fonction scalaire, alors

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

et

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

— Soit $\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{bmatrix}$ un tenseur symétrique du deuxième ordre, alors

$$\text{div}(\overline{\overline{T}}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \end{array} \right\}$$

1.5.3 Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} = \vec{e}_\phi$$

$$d(\overrightarrow{OM}) = \vec{e}_r dr + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi$$

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0, & \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_\phi, & \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = \sin \theta \vec{e}_\phi, & \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi} = \cos \theta \vec{e}_\phi, & \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = \sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta \end{array}$$

— Soit $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\phi \vec{e}_\phi$ un vecteur, alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}) = \overline{\overline{\nabla v}} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \cot g \theta v_\phi \right) \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \cot g \theta v_\theta + v_r \right) \end{array} \right]$$

et

$$\text{div} \vec{v} = \nabla \vec{v} : \vec{1} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2 \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \cot g \theta \frac{v_\theta}{r}$$

$$\Delta \vec{v} = \text{div}(\nabla(\vec{v})) = \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_r - \frac{2}{r^2} \left(v_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \\ \Delta v_\theta - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \\ \Delta v_\phi - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \cot g \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{2 \sin \theta} \right) \end{array} \right\}$$

— Soit f une fonction scalaire, alors

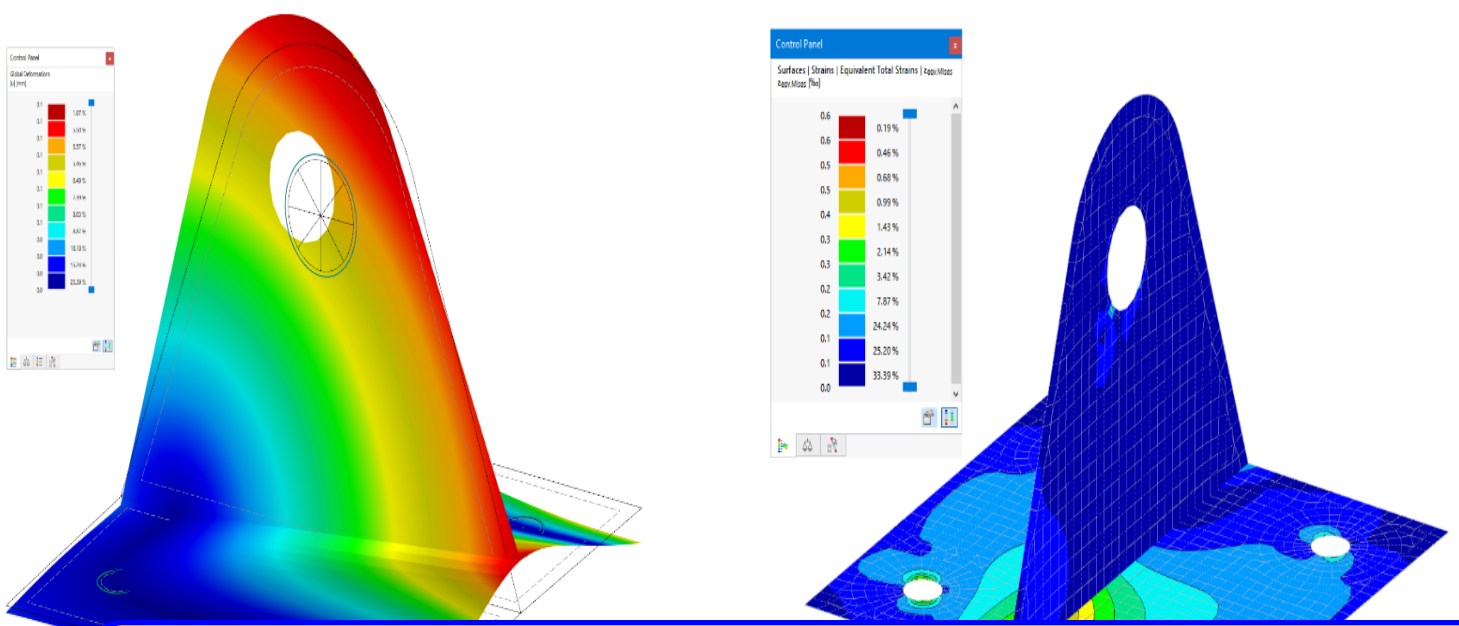
$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{array} \right\}$$

et

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot g \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

— Soit $\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{r\phi} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta\phi} \\ T_{\phi r} & T_{\phi\theta} & T_{\phi\phi} \end{bmatrix}$ un tenseur symétrique du deuxième ordre, alors

$$\operatorname{div}(\overline{\overline{\mathbf{T}}}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi} + T_{r\theta} \cot g \theta) \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} ((T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi}) \cot g \theta + 3T_{r\theta}) \\ \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (2T_{\theta\phi} \cot g \theta + 3T_{r\phi}) \end{array} \right\}$$



2. Introduction à la Mécanique des Milieux Continus

2.1 Quelques définitions

- Mécanique. Il s'agit de la branche de la physique qui décrit les mouvements et les équilibres d'un système.
- Milieu. On ne parle pas ici de matériau mais de milieu. On est donc en présence d'une théorie «abstraite», qui est dans un premier temps éloigné de la réalité physique et expérimentale. Ceci permet à cette théorie de rester le plus général possible. Elle ne se spécialisera en différentes branches (traitant de différents matériaux) que plus tard dans le cours.
- Continu. La notion de continuité est intimement liée à celle d'échelle. On va présenter une théorie abstraite, mais on doit garder à l'esprit qu'elle sera appliquée au monde physique. Tous les matériaux réels sont discontinus à petite échelle (molécules, cristaux, grains de sables, etc.). Un matériau réel sera donc considéré comme continu (cette notion sera précisée) à condition que l'on soit suffisamment loin, ou suffisamment myope.

D'une manière plus générale, la **MMC** est une construction mathématique. On dira qu'il s'agit d'une modélisation. En d'autres termes, c'est une représentation abstraite du monde physique qui repose sur des hypothèses que nous savons plus ou moins vraies selon les applications. Comme toujours dans les sciences physiques, le critère royal pour déterminer si la théorie est valide dans un cas donné est bien connu : il s'agit de l'expérimentation.

2.2 Positionnement de la MMC au sein de la mécanique

La plus simple des mécaniques «modernes» est la mécanique du point (fondée sur les résultats de Newton).

Elle permet de déterminer la position, la vitesse et l'accélération d'un «point matériel», c'est-à-dire d'un objet mathématique sans «forme» ni «volume», mais muni d'une masse et soumis à des forces. C'est la théorie utilisée par exemple pour étudier le mouvement des planètes sur leur orbite.



Sir Isaac Newton
1643 - 1727

R Isaac Newton, né en 1643 est un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle et la création. Newton a montré que le mouvement des objets sur terre et des corps célestes sont gouvernés par les mêmes lois naturelles ; en se basant sur les lois de Kepler sur le mouvement des planètes, il développa *la loi universelle de la gravitation*.

L'étape suivante est la mécanique du solide indéformable. Elle reprend les ingrédients de la mécanique du point, mais ajoute au système d'étude une «forme», et donc un volume et une distribution spatiale de la masse. Cette mécanique introduit les notions de rotation, d'inertie, et de moment. Elle s'applique par exemple très bien à l'étude des systèmes articulés (robotique, etc.) ou à l'étude micromécanique du sable.

L'ajout essentiel de la **MMC** est d'introduire la possibilité pour le système de se déformer. Bien entendu, ceci complique énormément la théorie, et va notamment rendre nécessaires des outils mathématiques beaucoup plus sophistiqués que pour les deux premières mécaniques.

2.3 Hypothèses principales de la MMC

La MMC est une mécanique dite «classique», ce qui signifie que :

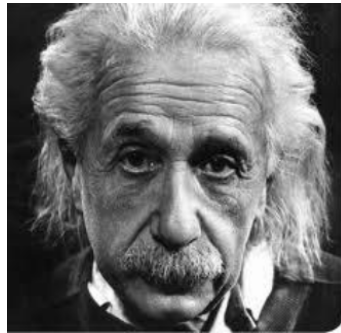
- l'échelle du problème est très grande devant la taille des particules élémentaires. La MMC n'est donc pas **quantique**.



Max Planck
1858 - 1947

R Max Planck, né Max Karl Ernst Ludwig Planck en 1858 à Kiel, et mort en 1947 à Göttingen, est un physicien allemand. Il fut lauréat du prix Nobel de physique de 1918 pour ses travaux en théorie des quanta. Max Planck fut l'un des fondateurs de la *mécanique quantique*. De ses travaux fut conceptualisée l'ère de Planck, période de l'histoire de l'Univers au cours de laquelle les quatre interactions fondamentales étaient unifiées.

— la vitesse de la matière est très faible devant celle de la lumière. La MMC n'est donc pas **relativiste**.



Albert Einstein
1879 - 1955

R Albert Einstein, né en 1879 à Ulm, et mort en 1955 à Princeton, est un physicien théoricien, il fut successivement allemand, apatride (1896), suisse (1901) et de double nationalité helvético-américaine (1940). Il publie sa théorie de la relativité restreinte en 1905 et sa théorie de la gravitation dite relativité générale en 1915. Il contribue largement au développement de la mécanique quantique et de la cosmologie, et reçoit le prix Nobel de physique de 1921 pour son explication de l'effet photoélectrique. Dans la culture populaire, son nom et sa personne sont directement liés aux notions d'intelligence et de savoir.

L'hypothèse principale de la **MMC** est nommée hypothèse de continuité. Elle stipule que les propriétés de la matière (densité, propriétés mécaniques, etc.) sont continues. Ceci implique qu'elles peuvent être décrites par des objets mathématiques continus et dérivables (au moins par morceaux). On nommera ces objets des **champs**, et ils dépendront à la fois de l'espace et du temps.

D'une manière générale, cela signifie que la **MMC**, lorsqu'elle sera appliquée au monde réel, s'intéressera à des moyennes locales. Il est impossible de déterminer le mouvement de chacune des particules élémentaires constituant un système physique (à titre d'exemple, un millimètre cube d'air ambiant comporte environ 10^{18} molécules), donc on devra s'intéresser à un volume suffisamment grand pour le considérer continu. A titre d'exemple, la pression exercée par un fluide sur une paroi solide est due à une multitude d'impact de molécules du fluide sur le solide, et on ne la représentera pourtant que par un scalaire (qui sera l'effet mécanique moyen de ces impacts sur un petit intervalle de temps et sur une petite surface du solide).

Par la suite on introduira progressivement un certain nombre d'autres hypothèses au sein de la théorie (hypothèses des petites perturbations, conservation de la masse, principe fondamental de la dynamique, etc.), lorsque l'on sentira que la théorie est «bloquée» sans l'apport de ces

hypothèses.

2.4 Typologie des milieux continus

La matière que l'on connaît dans le monde physique est souvent considérée comme étant dans l'un des trois états bien connus : solide, liquide, gazeux. Ces trois états peuvent prétendre, sous diverses conditions, au statut de milieu continu (même si c'est moins facile pour l'état gazeux, mais celui-ci intéresse assez peu les géotechniciens après tout).

On peut aussi proposer un grand nombre d'états intermédiaires : fluide, pâteux, mou, épais, plastique, visqueux, etc. Par exemple, un morceau de raclette soumis aux sollicitations thermiques d'un poêlon va passer progressivement de solide à liquide, mais on ne sait pas vraiment définir à quel moment s'opérera exactement la transition. On se rend compte que les frontières entre les trois états classiques de la matière sont finalement assez flou.

La **MMC** se place au dessus de ces considérations. Dans un premier temps, on va donc mettre de côté toute notion de «consistance», et proposer une modélisation mathématique de la déformation d'un milieu qui ignore complètement cette notion. Ce n'est que dans un deuxième temps que l'on introduira le concept de modèle de comportement, et que l'on imaginera des modèles mathématiques (fondés sur l'expérience et/ou sur des considérations physiques) propres à chaque application dans le monde physique.

2.5 Applications de la MMC

En tant que théorie de la déformation de la matière, la **MMC** est absolument omniprésente dans l'ingénierie. Même si tous les ingénieurs ne peuvent pas prétendre la comprendre parfaitement, l'immense majorité d'entre eux s'en servent (parfois sans le savoir), au moins par l'intermédiaire de logiciels de calcul mécanique.

Parmi les applications les plus évidentes, on peut citer :

- Les procédés industriels (emboutissage, usinage, etc.), l'industrie mécanique (automobile, machines-outils, aéronautique, etc.), la biomécanique, les matériaux composites, la micromécanique, la mécatronique, etc.
- Les structures de génie civil, bâtiments, ponts, barrages, routes, en béton, acier, bois, aluminium, etc.
- La mécanique des fluides, l'aérodynamique, les écoulements en canaux et conduites, les écoulements fluviaux et souterrains, etc.
- La géophysique, la mécanique des sols, la mécanique des roches, etc.
- Beaucoup d'autres disciplines scientifiques et techniques.

La **MMC** est donc l'un (si ce n'est le principal) des langages communs à tous les ingénieurs. Dans les premières parties de sa formulation (comme par exemple ce polycopié), elle a le statut de science. Au cours de ses diverses applications, elle est ensuite déclinée en très nombreuses techniques d'ingénierie propres à chaque discipline.

Pour l'ingénieur géotechnicien, la **MMC** (couplée à des disciplines secondaires, comme la mécanique des sols ou la mécanique des fluides) intervient directement ou indirectement lorsqu'on doit répondre par exemple aux questions suivantes :

- De combien de millimètres ma fondation va-t-elle tasser sous cette charge ?
- Au bout de combien de temps le tassement final sera-t-il atteint ?
- Quel chargement ce soutènement peut-il supporter avant de céder ?

- Ce talus sera-t-il stable en cas de grosse pluie ?
- Quel débit d'eau va s'infiltrer au travers de ce barrage ?

Il s'agit d'un très petit nombre d'exemples parmi une multitude. D'une manière générale, la **MMC** interviendra dès que l'on aura à traiter des problèmes de rigidité, de résistance, de stabilité, ou d'écoulement.

2.6 Esprit du cours

La plupart des équations présentées lors de ce cours sont d'une grande complexité mathématique. Pour la grande majorité d'entre elles, il est impossible de les résoudre analytiquement à la main. D'ailleurs, dans le cadre de ce cours, ce n'est pas nécessaire. Notre intérêt premier dans cette initiation à la **MMC** sera de poser des équations, et non pas de les résoudre.

Bien entendu, les ingénieurs disposent d'un arsenal de méthodes numériques pour effectuer cette résolution (ce qui est plutôt rassurant quant à l'utilité de la théorie). Néanmoins, pour profiter pleinement des apports de ce cours, il vaut mieux oublier complètement la notion de résolution dans un premier temps. On se concentrera beaucoup plus sur la théorie, et sur les raisons profondes qui nous font poser de tels systèmes d'équations.

CINÉMATIQUE

3 Le milieu continu : une modélisation . . 39

- 3.1 Échelle, modélisation, validation
- 3.2 Les concepts et leur formulation
- 3.3 Points de vue de Lagrange et d'Euler
- 3.4 Description lagrangienne
- 3.5 Description eulérienne
- 3.6 Exercice

4 Étude des Déformation du milieu Continu 55

- 4.1 Introduction
- 4.2 Gradient d'une transformation
- 4.3 Tenseur des dilatations
- 4.4 Tenseurs des déformations
- 4.5 Formulation en fonction des déplacements
- 4.6 Hypothèse des petites déformations
- 4.7 Hypothèse des petites transformations
- 4.8 Conditions de compatibilité
- 4.9 Exercice

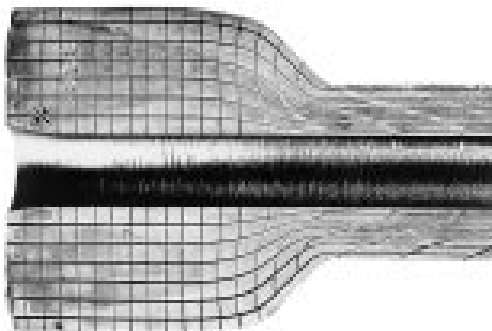
5 Cinématique du milieu continu 77

- 5.1 Introduction
- 5.2 Tenseur gradient des vitesses
- 5.3 Tenseur taux des déformations
- 5.4 Tenseur Taux de rotation
- 5.5 Dérivée particulière
- 5.6 Exercice

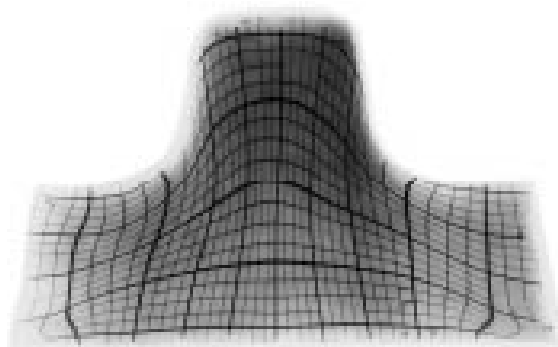


3. Le milieu continu : une modélisation

3.1 Échelle, modélisation, validation



(a) Extrusion d'un tube.



(b) Matriçage d'un lopin en alliage

FIGURE 3.1 – formage à froid ou à chaud

C'est de l'observation de la déformation d'un solide, par exemple au cours d'une opération de formage à froid ou à chaud (figures 3.1a et 3.1b), de l'écoulement d'un liquide, de la détente ou de la compression d'un gaz, que la notion de milieu continu déformable tire son origine. Elle signifie que l'observateur retire de ces expériences l'idée que certains problèmes peuvent être traités à une échelle **macroscopique** en assimilant cette matière à un milieu "continu", sans contredire les modélisations de la physique microscopique.

La notion **d'échelle** pertinente pour un problème est ainsi introduite : liée évidemment aux phénomènes mis en jeu, elle dépend de façon essentielle de la nature des questions que l'on se pose à leur propos. Un exemple tiré de la pratique journalière de certains ingénieurs permet d'en fournir une illustration.

On se propose dans le présent chapitre de cerner, puis de formuler mathématiquement, le concept de continuité. On présentera ainsi la modélisation du milieu continu classique tridimensionnel, dont les applications concernent tant la mécanique des solides déformables que la mécanique des fluides (cette distinction, traditionnelle, devient d'ailleurs, dans certains cas, bien difficile à faire : déformation ou écoulement de polymères par exemple).

3.2 Les concepts et leur formulation

3.2.1 L'idée directrice

Dans la démarche expérimentale usuelle, que ce soit pour suivre l'écoulement d'un fluide ou les déformations d'un solide, l'observateur est conduit à procéder au marquage d'éléments matériels constitutifs du système étudié à un instant donné et à repérer ensuite leur évolution géométrique (figures 3.1a et 3.1b). Il est évident que le marquage d'un tel élément, aussi fin soit-il, concerne un "petit domaine matériel", qui sera réputé infinitésimal à l'échelle macroscopique du mécanicien, mais qui se situe au-dessus de l'échelle microscopique du physicien.

Le concept intuitif de continuité se réfère à l'évolution des positions géométriques de ces éléments marqués au cours du temps : des éléments matériels voisins à un instant donné demeurent voisins au cours du temps et leurs évolutions sont comparables. À l'évidence, la validité de ce concept sera prioritairement dépendante de la possibilité réelle d'identifier les petits domaines matériels pertinents.

La modélisation mathématique du concept physique de continuité sera donc d'abord géométrique.

Du point de vue géométrique la modélisation du milieu continu classique part de l'idée que le système mécanique considéré S est représenté par un volume Ω dont les " $d\Omega$ " représentent les constituants élémentaires appelés "particules".

Le concept de continuité étant lié à l'observation de *l'évolution du système*, on souhaite assurer au cours de celle-ci pour des particules voisines :

- la conservation de la proximité géométrique,
- l'évolution comparable des propriétés physiques.

3.2.2 Configurations du système

L'état du système S à l'instant t dans un référentiel R est appelé **configuration de ce système**. On désigne de façon générique par κ_t la configuration actuelle (instant courant t). La configuration géométrique de S est décrite par l'ensemble des positions, repérées dans le référentiel R , de ses particules. Ce repérage de la configuration géométrique dans R se fait au moyen du vecteur-position \overrightarrow{OM} , noté aussi \vec{x} , qui précise la position de chaque particule de S à l'instant t à partir de l'origine O d'un repère R dans R . On peut définir \vec{x} par ses coordonnées (x, y, z) ou $x^i (i = 1, 2, 3)$ dans R . Le volume occupé par S dans cette configuration est Ω_t de frontière $\partial\Omega_t$.

On introduit aussi la notion de **configuration de référence** : c'est la configuration particulière κ_0 , du système à un instant t_0 **fixé**. Sauf mention explicite du contraire, on posera $t_0 = 0$ (et la configuration de référence pourra aussi être appelée configuration initiale). S occupe aussi dans κ_0 un volume Ω_0 de frontière $\partial\Omega_0$ (figure 3.2). Les coordonnées des vecteurs-positions \overrightarrow{OM}_0 de κ_0 dans le repère R de R seront systématiquement notées (X, Y, Z) ou encore $X^i (i = 1, 2, 3)$. Le vecteur \overrightarrow{OM}_0 sera aussi noté \vec{X} .

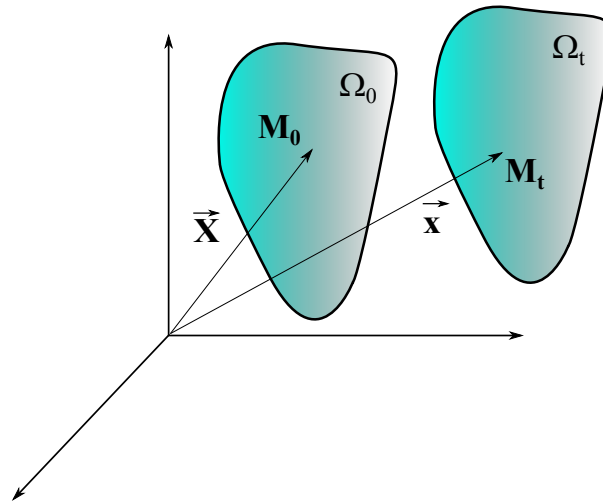


FIGURE 3.2 – Configurations du système.

Ainsi :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \vec{x} & \text{decoordonnees } (x, y, z) \text{ ou } x^i \text{ dans } \kappa_t \\ \overrightarrow{OM_0} = \vec{X} & \text{decoordonnees } (X, Y, Z) \text{ ou } X^i \text{ dans } \kappa_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

3.3 Points de vue de Lagrange et d'Euler

Deux points de vue coexistent pacifiquement lorsqu'il s'agit de décrire un mouvement. On appelle ces points de vue les descriptions lagrangienne et eulérienne du mouvement. La première est plus adaptée à la mécanique du solide, et la deuxième à la mécanique des fluides, mais cette distinction n'est pas du tout figée. En réalité, chacune de ces descriptions propose des outils qui simplifieront plus ou moins la définition et la résolution d'un problème en fonction d'un contexte donné. Il est important de comprendre les deux.

3.4 Description lagrangienne

3.4.1 Définition

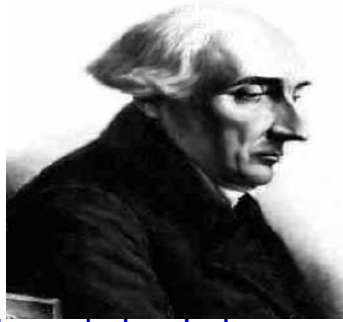
On se propose maintenant de donner une formulation mathématique précise des idées intuitives et des concepts présentés dans les sections précédentes.

Dans cet esprit, en se référant au marquage des petits domaines matériels évoqué au paragraphe 2.1, la description lagrangienne consiste à :

- identifier les particules constitutives du système par leur position géométrique dans une configuration de celui-ci prise comme référence et notée κ_0 , c'est-à-dire par la variable vectorielle \vec{X}
- exprimer la valeur de toute grandeur physique dans la configuration actuelle en fonction de la particule à laquelle elle est attachée et de l'instant actuel, c'est-à-dire en fonction des variables \vec{X} et t



Joseph Louis, comte Lagrange, né à turin en 1736 et mort à paris en 1813, est un mathématicien, mécanicien et astronome italien naturalisé français. A l'âge de trente ans, il quitte le



Joseph-Louis Lagrange
1736 - 1813

piémont et va séjourner à Berlin pendant vingt-et-un ans. Ensuite, il s'installe pour ses vingt six dernières années à Paris, où il obtient la nationalité française sur l'instance d'Antoine Lavoisier.

Ainsi le vecteur-position $\overrightarrow{OM} = \vec{x}$ de la particule située initialement en M_0 dans κ_0 est donné par

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) \quad (3.2)$$

et la valeur d'une grandeur physique attachée à cette particule, soit B est :

$$B = B(\vec{X}, t) \quad (3.3)$$

Dans la formule 3.2 $\vec{\phi}$ est une fonction vectorielle définie sur $\Omega_0, \forall t$, et qui vérifie évidemment :

$$\vec{\phi}(\vec{X}, 0) = \vec{X} \quad (3.4)$$

tandis que, suivant la nature de la grandeur physique concernée, B est une fonction scalaire, vectorielle, ou tensorielle d'ordre quelconque, qui vérifie la formule homologue de 3.4.

La fonction $\vec{\phi}$ décrit ainsi la correspondance géométrique entre les configurations (spatiales) γ_0 et γ_t . En fonction de t c'est toute l'évolution géométrique du système S , c'est-à-dire son mouvement, qui est ainsi donnée.

3.4.2 Hypothèses de continuité

On va naturellement examiner maintenant les conditions mathématiques sur $\vec{\phi}$ qui permettent de rendre compte convenablement du concept intuitif de continuité dégagé au paragraphe.

On propose les hypothèses suivantes :

- $\vec{\phi}$ est une bijection de Ω_0 sur Ω_t dont on désigne par $\vec{\psi}$ la bijection réciproque :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{X} = \vec{\psi}(\vec{x}, t) \quad (3.5)$$

- $\vec{\phi}$ et $\vec{\psi}$ sont continues par rapport à l'ensemble des **variables d'espace et de temps**.

Ces hypothèses ont les conséquences classiques suivantes qui permettent d'examiner la validité de cette modélisation par comparaison avec l'expérience.

1. Deux particules qui occupent dans κ_0 des positions "infinitement voisines", restent infinitement voisines dans toute configuration.
2. Des particules qui occupent dans κ_0 un domaine connexe, occupent dans κ_t un domaine connexe de même ordre (volume, surface, courbe). Ceci permet la définition mathématique du concept de **domaine matériel** : domaine **transporté par le mouvement** c'est-à-dire qu'il s'agit à chaque instant du domaine géométrique occupé par le même ensemble de particules.
3. Les particules qui se trouvent dans κ_0 , à l'intérieur d'une surface fermée, restent à tout instant t à l'intérieur de la surface transportée. Ainsi la frontière d'un volume matériel est une surface matérielle.
4. En particulier, la frontière de S est une surface matérielle ce qui signifie qu'elle est toujours constituée des mêmes particules.
5. En conséquence des hypothèses de continue différentiability : soit $J(\vec{X}, t)$ le déterminant jacobien de $\vec{\phi}$ à l'instant t en (X_1, X_2, X_3) , c'est-à-dire le déterminant de la matrice jacobienne des dérivées premières des x_i par rapport aux X_i

$$J(\vec{X}, t) = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} \quad (3.6)$$

$\vec{\phi}$ étant continue et continûment dérivable de même que $\vec{\psi}$, on en déduit que $J(\vec{X}, t)$ est continu par rapport à X et t . De plus il ne peut être ni nul ni infini, puisque les matrices jacobienes de $\vec{\phi}$ et de $\vec{\psi}$ doivent être inversibles. Il conserve donc un signe constant sur Ω_0 et au cours du mouvement. Il résulte alors de 3.4 où l'on a :

$$J(\vec{X}, 0) = 1 \quad \forall M_0 \in \Omega_0 \quad (3.7)$$

que $J(\vec{X}, 0)$ est positif et fini $\forall M_0 \in \Omega_0, \forall t$:

$$0 < J(\vec{X}, t) < +\infty \quad (3.8)$$

3.4.3 Pertinence du modèle : affaiblissement des hypothèses de continuité

Les conséquences énoncées ci-dessus apparaissent conformes à l'intuition de la continuité qui est à l'origine même de la modélisation. On est toutefois amené à nuancer quelque peu les hypothèses mathématiques de façon à être en mesure de traiter plus commodément certains phénomènes observés.

Il s'agit, par exemple, des fissures rencontrées en mécanique de la rupture, des surfaces de rupture, des surfaces de glissement, de la localisation de la déformation en mécanique des solides (figure 3.3a et 3.3b), des surfaces de jet en mécanique des fluides (figure 3.4). Pour celles-ci la conservation de la proximité de deux points initialement voisins au cours de l'évolution est trop contraignante : il convient de permettre des discontinuités de ϕ au franchissement de certaines surfaces.

Pour ces raisons on convient d'affaiblir les hypothèses de continuité en n'imposant plus que **la continuité et la continue différentiability de ϕ par morceaux** : des discontinuités de la fonction ϕ et/ou de ses dérivées sont permises au franchissement d'une infinité dénombrable de surfaces dans R^3 .

3.4.4 Interprétation physique de la description lagrangienne : trajectoires

La description lagrangienne est la formulation mathématique d'une réalité expérimentale simple. En effet la formule (3.2) décrit le mouvement de chaque particule du système : si l'on considère la

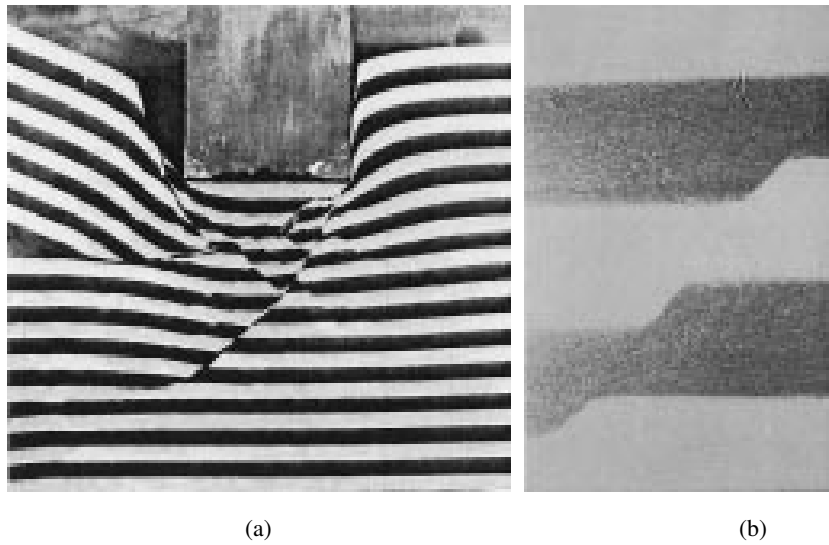


FIGURE 3.3 – Poinçonnement asymétrique d'un bloc de plasticine



FIGURE 3.4 – Écoulement autour d'une plaque plane.

particule identifiée par \vec{X} , (3.2) fournit la description de sa trajectoire, paramétrée en fonction du temps, dans le référentiel R :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) \quad \text{ou} \quad \vec{X} \text{ est fixe}$$

Pour cette raison on dit aussi que la description lagrangienne est une description "par trajectoires". Concrètement, la visualisation de la trajectoire d'une particule à partir d'un instant t_0 , s'obtient en marquant une particule à l'instant donné t_0 , puis en faisant une prise de vue en pose du mouvement du système à partir de l'instant t_0 . Ce type d'expériences est réalisé couramment en mécanique des solides et en mécanique des fluides.

3.4.5 Lignes d'émission

La prise d'une vue **en instantané** conduit à introduire un autre type de courbes géométriques, les **lignes d'émission**, définies comme suit (figure 9).

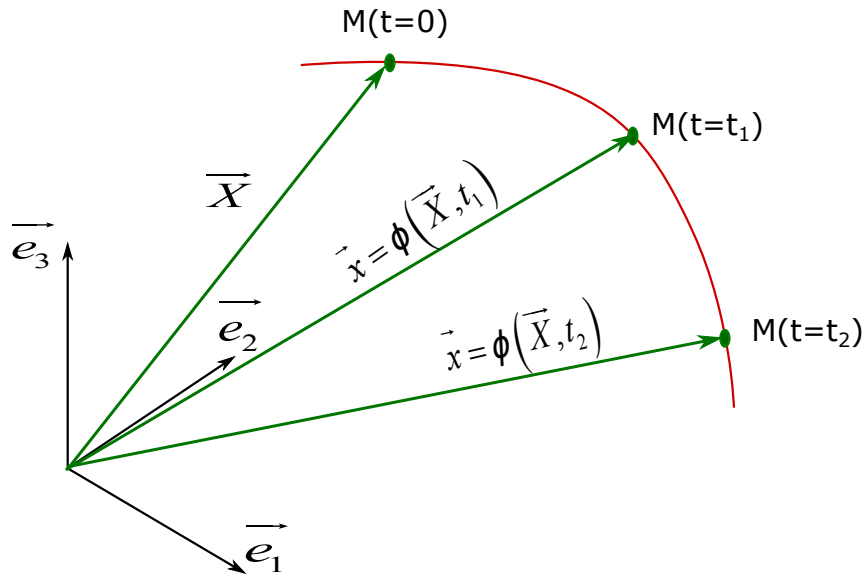


FIGURE 3.5 – Trajectoire d’une particule.

En un point **géométrique** P dans R , de coordonnées x_p^i , et à partir de l’instant t_0 , on marque chaque particule passant par P ; on observe, à l’instant $T > t_0$, les positions de ces particules dans R : la **courbe géométrique** correspondante est la **ligne d’émission du point** P observée à l’instant T .

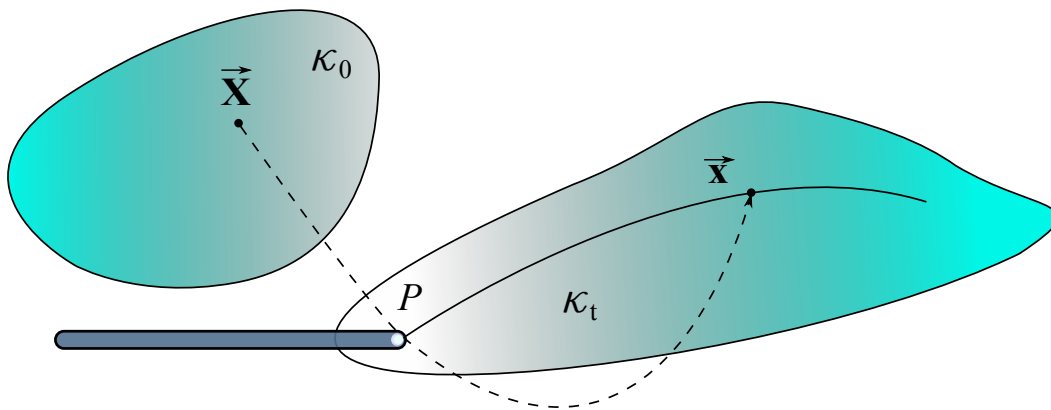


FIGURE 3.6 – Ligne d’émission (en pointillé)

L’équation, paramétrée en t' , de cette courbe s’obtient à partir de (3.2) et (3.5) en suivant la particule \vec{X} qui, passant à l’instant t_0 en P , a été marquée et se trouve en \vec{x} à l’instant T sur la ligne d’émission :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{\psi}(\vec{x}_p, t'), T) \quad t_0 \leq t' \leq T \tag{3.9}$$

Un exemple de visualisation des lignes d’émissions est représenté dans la figure 3.7

3.4.6 Vitesse d’une particule

La vitesse, dans le référentiel R , de la particule identifiée par sa position \vec{X} dans κ_0 s’obtient immédiatement à partir de (3.2). C’est le vecteur :

$$\vec{v}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{\phi}(\vec{X}, t)}{\partial t} \tag{3.10}$$

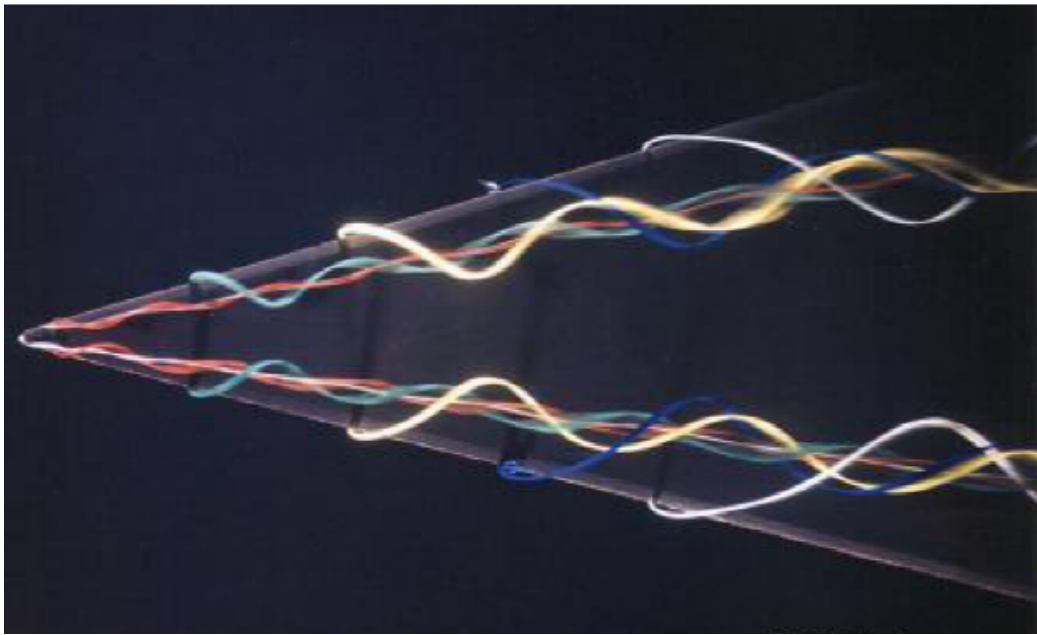


FIGURE 3.7 – Visualisation par colorant des lignes d'émission issues du bord d'attaque d'une aile delta.(image ONERA.)

Le vecteur vitesse $\vec{v}(\vec{X}, t)$ dans R est évidemment tangent à la trajectoire de la particule dans R au point $\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t)$.

De même l'accélération de la particule s'écrit :

$$\vec{\gamma}(\vec{X}, t) = \frac{\partial^2 \vec{\phi}(\vec{X}, t)}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

3.5 Description eulérienne

3.5.1 Définition

En se référant à l'interprétation physique de la description lagrangienne à partir de la prise de vues en poses longues, on peut introduire la description eulérienne par l'idée intuitive suivante exposée sur l'aspect géométrique : le cliché obtenu en pose peut être reconstitué par la superposition d'une succession de prises de vues instantanées.

Dans une formulation plus mathématique, la description eulérienne de l'évolution consiste à prendre à chaque instant la configuration actuelle comme configuration de référence pour décrire l'évolution infinitésimale entre t et $(t + dt)$.

R Leonard Euler, né à Bâle en 1707 et mort à Saint-Petersbourg en 1783, est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie dans l'empire russe et en Allemagne. Euler est considéré comme un éminent mathématicien du 18^{ème} siècle et l'un des plus grands et des plus prolifiques de tous les temps. Une déclaration attribuée à Pierre Simon de Laplace



Leonard Euler
1707 - 1783

exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « *Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous* ».

Ainsi pour l'aspect géométrique la description eulérienne définit le mouvement du système par la donnée, à chaque instant t , de la vitesse \vec{v}_t de la particule située au point géométrique M dans κ_t :

$$\forall t, \forall M \in \Omega_t, \quad \vec{v} = \vec{v}_t(\vec{x}, t) \quad (3.12)$$

On retrouve bien encore la donnée d'une fonction vectorielle de 4 variables scalaires mais, à la

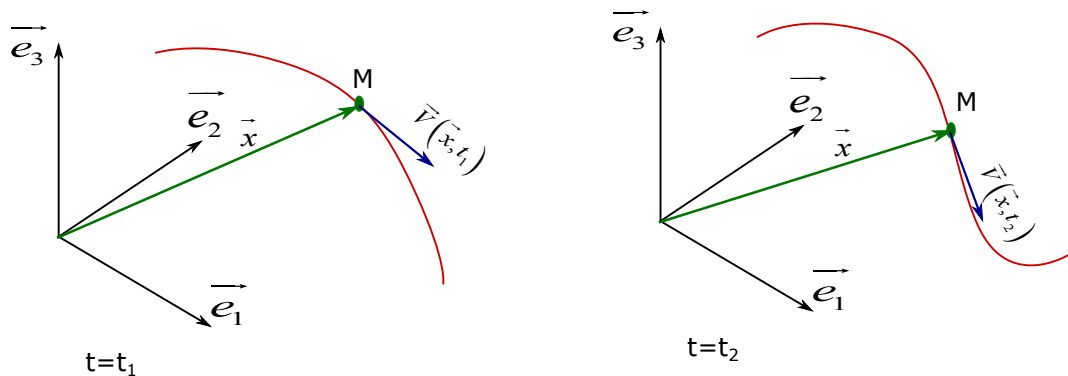


FIGURE 3.8 – Description Eulerienne.

différence de (3.2), les variables spatiales x_1, x_2, x_3 sont relatives à la **configuration actuelle** et non plus à une configuration de référence : elles n'identifient donc plus les particules au cours du temps.

Toute grandeur physique est, de même, définie sur κ_t sous la forme :

$$\forall t, \forall M \in \Omega_t, \quad B = b(\vec{x}, t) \quad (3.13)$$

En règle générale on convient, pour permettre un décodage des formules "à vue", de désigner par des lettres minuscules (comme \vec{x}) les fonctions relatives à la description eulérienne, et par des lettres majuscules (comme \vec{X}) les fonctions relatives à la description lagrangienne.

3.5.2 Détermination des trajectoires

Il est clair que la description eulérienne de l'évolution d'un système S s'obtient de façon immédiate dès que l'on en connaît la description lagrangienne. En effet en égalant les deux

expressions de la vitesse de la particule \vec{X} dans R à l'instant t , puis les deux expressions de la grandeur B pour la particule \vec{X} à l'instant t il vient :

$$\begin{cases} \vec{v}_i(x,t) = \vec{v}(\vec{X},t) = \vec{v}(\vec{\psi}(\vec{x},t),t) \\ b(x,t) = B(\vec{X},t) = B(\vec{\psi}(\vec{x},t),t) \end{cases} \quad (3.14)$$

Inversement il convient de vérifier que la description eulérienne, introduite de façon intuitive au paragraphe précédent, est bien équivalente à la description lagrangienne. Pour cela il suffit de vérifier que (3.12) permet effectivement de reconstituer la fonction $\vec{\phi}$ de la formule (3.2), c'est-à-dire qu'il faut résoudre le problème : déterminer la fonction vectorielle $\vec{\phi}$ solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{\phi}(\vec{X},t)}{\partial t} = \vec{v}_i(\vec{\phi}(\vec{X},t),t) \\ \vec{\phi}(\vec{X},0) = \vec{X}, \text{ condition initiale} \end{cases} \quad (3.15)$$

Il s'agit en fait de déterminer la trajectoire de toute particule avec son horaire de parcours. Ce problème peut aussi s'écrire sous la forme différentielle :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}_i(\vec{x},t) \\ \vec{x}|_{t=0} = \vec{X}, \text{ condition initiale} \end{cases} \quad (3.16)$$

qui représente un système de 3 équations différentielles pour les 3 fonctions scalaires inconnues x_1, x_2, x_3 , de la variable t .

Sous réserve de conditions de régularité sur la fonction \vec{v}_i , on peut en déterminer la solution unique pour chaque condition initiale, qui se met ainsi sous la forme cherchée :

$$\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X},t)$$

ce qui achève la détermination des trajectoires.

L'ensemble des trajectoires dans R de toutes les particules constitue une famille de courbes à 3 paramètres (coordonnées X_i de M_0).

3.5.3 Lignes de courant

Il est utile, pour certaines applications, d'introduire une troisième famille de **courbes géométriques** issues de la définition du mouvement d'un milieu continu. À un instant donné T , on appelle lignes de courant du mouvement dans le référentiel R , les lignes enveloppes du champ des vecteurs vitesses $\vec{v}_i(\vec{x},T)$.

Ces lignes sont donc définies dans R par le système différentiel :

$$\frac{dx_1}{v_1(\vec{x},T)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x},T)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x},T)} \quad (3.17)$$

c'est un système différentiel de 2 équations en x_1, x_2, x_3 . Les lignes de courant dans R à l'instant T constituent **une famille de courbes géométriques à 2 paramètres**.

Un exemple de visualisation des lignes de courant est représenté dans la figure 3.10

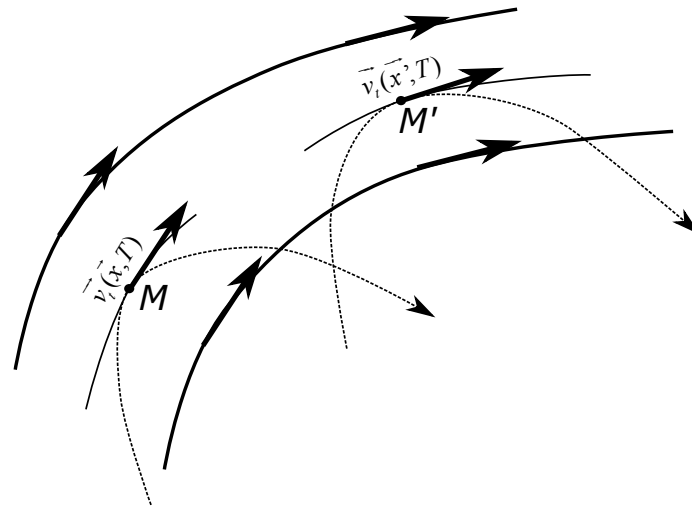


FIGURE 3.9 – Lignes de courant à l'instant T (en pointillé : trajectoires de deux particules)



FIGURE 3.10 – Visualisation par plan laser des lignes de courant de l'écoulement transverse autour du Concorde.(image ONERA.)

3.5.4 Mouvements stationnaires (ou permanents)

Le mouvement est dit stationnaire (ou permanent) dans un référentiel R si, dans sa description eulérienne, $\vec{v}_i(\vec{x}, t)$ est indépendante de t et n'est fonction que des coordonnées du point géométrique M . Il en résulte les propriétés suivantes.

- Dans la recherche des trajectoires et de leurs horaires de parcours par le système différentiel (3.16) le problème se découple en un problème purement géométrique et un problème d'horaire de parcours.

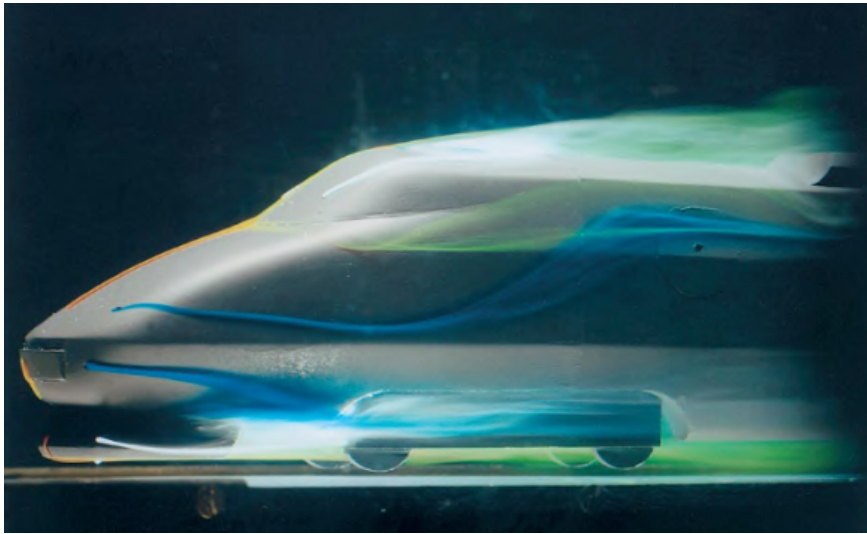


FIGURE 3.11 – Écoulement autour d'une maquette de motrice à grande vitesse.(image ONERA.)

En effet, puisque :

$$\vec{v}_i(\vec{x}, t) \equiv \vec{v}(\vec{x}) \quad (3.18)$$

on tire de (3.16) le système :

$$\frac{dx_1}{v_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x})} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x})} \quad (3.19)$$

celui-ci est identique à celui qui, à chaque instant T , permet de déterminer les lignes de courant (3.17), lui aussi indépendant de T .

Ainsi les trajectoires forment alors une famille de courbes géométriques à 2 paramètres, identique à la famille des lignes de courant qui deviennent, dans ce cas, indépendantes du temps.

3.6 Exercice

3.6.1 Enoncé

Soit l'écoulement défini par :

$$\vec{V} = \begin{cases} V_1 = 2.t - 5 \\ V_2 = t - 1 \end{cases}$$

1. Déterminer en fonction du paramètre t , les trajectoires de trois 3 points matériels A , B et C qui passent par l'origine aux instants $t = 0$, $t = 1$, $t = 3$
2. Déterminer sous forme paramétrique en fonction du paramètre t , les équations d'une ligne d'émission relative à un point de coordonnées (y_1, y_2) et à l'instant T .
3. Tracer la ligne d'émission relative à l'origine et à l'instant $T = 3$
4. Montrer que les lignes de courant à un instant τ sont des droites parallèles.

3.6.2 Solution

- Déterminer en fonction du paramètre t , les trajectoires de trois 3 points matériels A , B et C qui passent par l'origine aux instants $t = 0$, $t = 1$, $t = 3$.

$$\frac{dx_1}{dt} = 2.t - 5$$

$$dx_1 = (2.t - 5) . dt$$

$$x_1 = t^2 - 5.t + X_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = t - 1$$

$$dx_2 = (t - 1) . dt$$

$$x_2 = \frac{t^2}{2} - t + X_2$$

$$\begin{cases} x_1 = t^2 - 5.t + X_1 \\ x_2 = \frac{t^2}{2} - t + X_2 \end{cases}$$

la particule A passe par l'origine a l'instant $t = 0s$ ($x_1 = 0, x_2 = 0$)

$$\begin{cases} 0 = X_1 \\ 0 = X_2 \end{cases}$$

la particule B passe par l'origine a l'instant $t = 1s$ ($x_1 = 0, x_2 = 0$)

$$\begin{cases} 0 = 1^2 - 5.1 + X_1 \\ 0 = \frac{1^2}{2} - 1 + X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = X_1 \\ \frac{1}{2} = X_2 \end{cases}$$

la particule C passe par l'origine a l'instant $t = 3s$ ($x_1 = 0, x_2 = 0$)

$$\begin{cases} 0 = 3^2 - 5.3 + X_1 \\ 0 = \frac{3^2}{2} - 3 + X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 = X_1 \\ -\frac{3}{2} = X_2 \end{cases}$$

La trajectoire de la particule A est :

$$\begin{cases} x_1 = t^2 - 5.t \\ x_2 = \frac{t^2}{2} - t \end{cases}$$

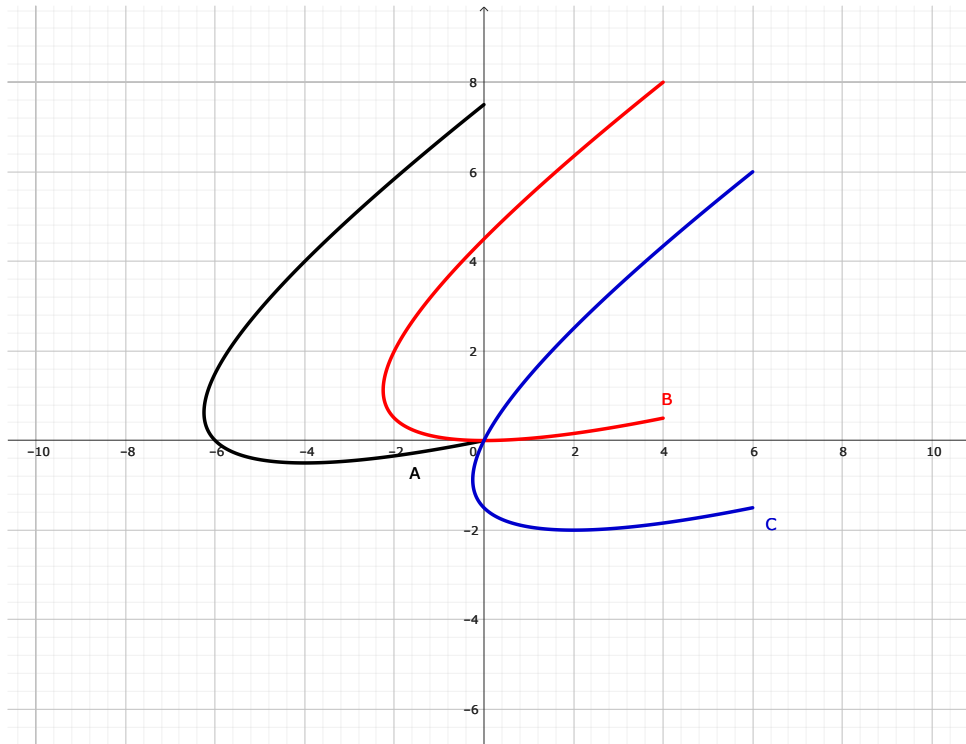
La trajectoire de la particule B est :

$$\begin{cases} x_1 = t^2 - 5.t + 4 \\ x_2 = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \end{cases}$$

La trajectoire de la particule C est :

$$\begin{cases} x_1 = t^2 - 5.t + 6 \\ x_2 = \frac{t^2}{2} - t - \frac{3}{2} \end{cases}$$

- Déterminer sous forme paramétrique en fonction du paramètre t , les équations d'une ligne d'émission relative à un point de coordonnées (y_1, y_2) et à l'instant T .

FIGURE 3.12 – Trajectoire de trois point A, B et C pour $t = 0..5s$

La position des particules a l'instant T est de la forme :

$$\begin{cases} x_1 = T^2 - 5.T + X_1 \\ x_2 = \frac{T^2}{2} - T + X_2 \end{cases}$$

L'équation des particules qui passent par le point de coordonnées (y_1, y_2) et à l'instant $t < T$.

$$\begin{cases} y_1 = t^2 - 5.t + X_1 \\ y_2 = \frac{t^2}{2} - t + X_2 \end{cases}$$

De cette équation on détermine la position initiales des particule passant par le point de coordonnées (y_1, y_2)

$$\begin{cases} X_1 = y_1 - t^2 + 5.t \\ X_2 = y_2 - \frac{t^2}{2} + t \end{cases}$$

En remplaçant dans la première équation, on aura l'équation de la ligne d'émission.

$$\begin{cases} x_1 = -t^2 + 5.t + y_1 + T^2 - 5.T \\ x_2 = -\frac{t^2}{2} + t + y_2 + \frac{T^2}{2} - T \end{cases}$$

— Tracer la ligne d'émission relative à l'origine et a l'instant $T = 3$
L'équation de la ligne d'émission relative à l'origine et a l'instant $T = 3$

$$\begin{cases} x_1 = -t^2 + 5.t - 6 \\ x_2 = -\frac{t^2}{2} + t + \frac{3}{2} \end{cases}$$

— Montrer que les lignes de courant à un instant τ sont des droites parallèles.

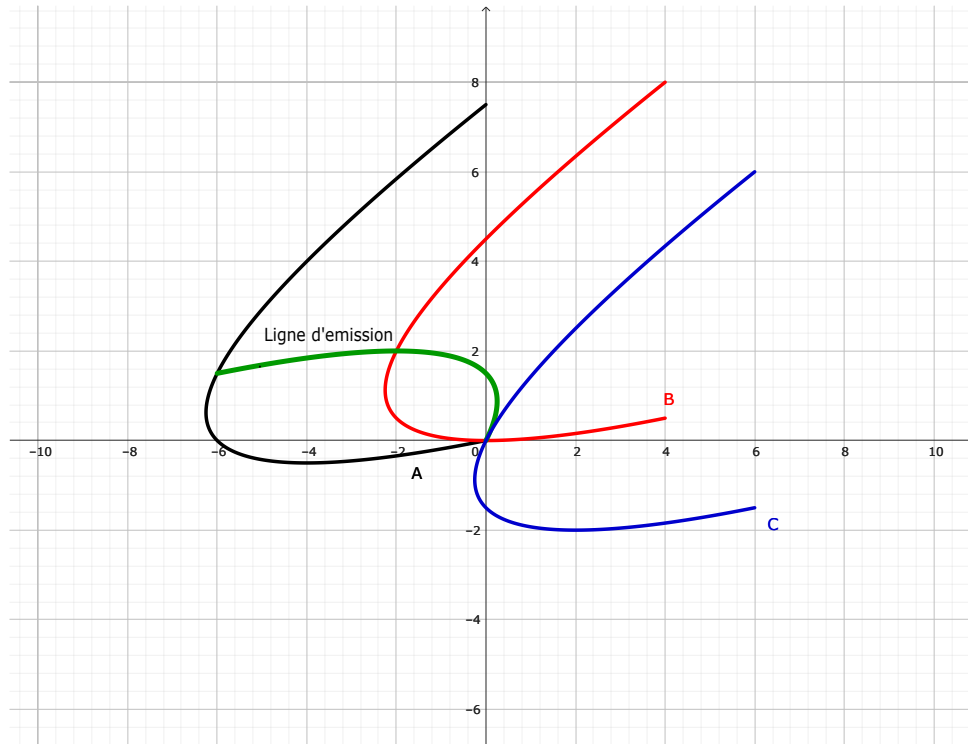


FIGURE 3.13 – ligne d'émission relative à l'origine et à l'instant $T = 3$

L'équation des lignes de courant est de la forme :

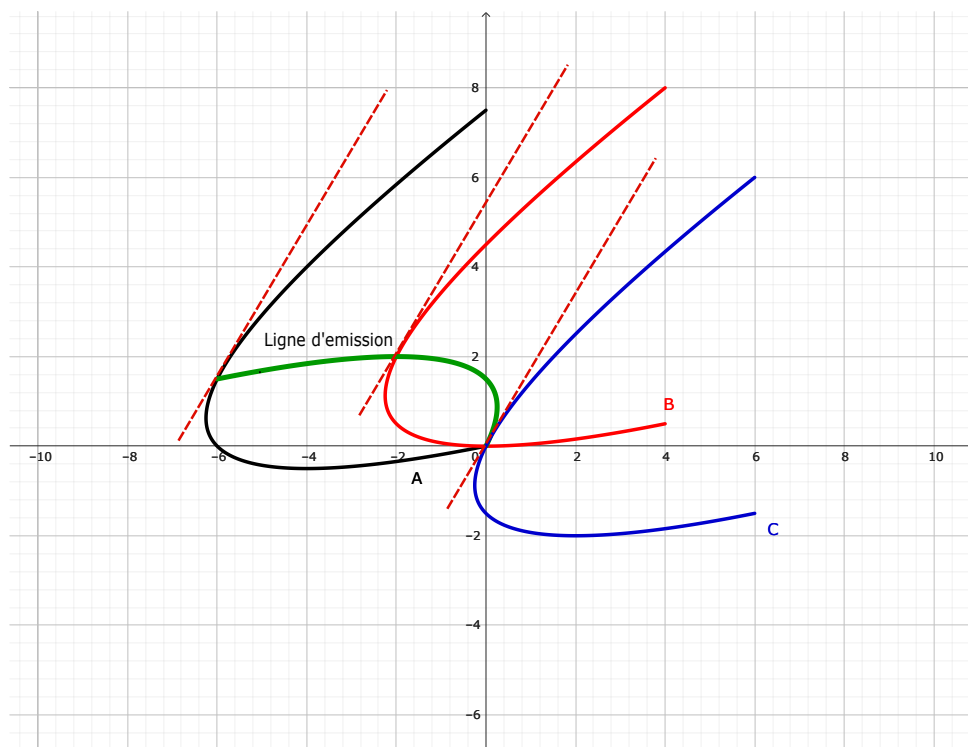
$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2}$$

$$\frac{dx_1}{2\tau - 5} = \frac{dx_2}{\tau - 1}$$

$$dx_2 = \frac{\tau - 1}{2\tau - 5} dx_1$$

$$x_2 = \frac{\tau - 1}{2\tau - 5} x_1 + C_0$$

Ce qui représente des droites parallèles.

FIGURE 3.14 – lignes de courants a l'instant $\tau = 3$

4. Étude des Déformation du milieu Continu

4.1 Introduction

La figure 4.1 représente l'indentation d'un solide par un cylindre. Nous avons choisi comme configuration initiale la configuration non déformée. Sur les deux configurations est représenté un réseau de lignes. Après déformation (dans la configuration κ_t), le réseau de lignes initialement orthogonales est distordu. Nous remarquons que la distorsion du réseau :

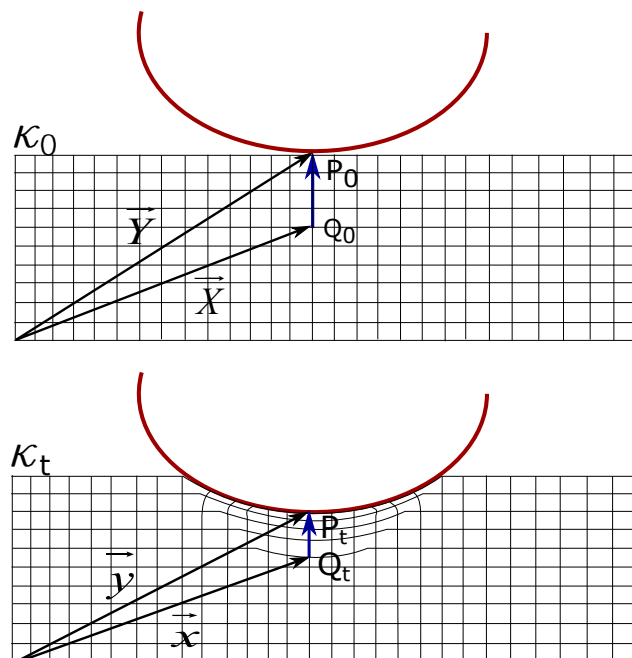


FIGURE 4.1 – Réseau de lignes dessinées sur un solide avant indentation et après indentation par un cylindre.

— n'est pas constante dans tout le solide ;

- se traduit par une variation des angles initialement droits ;
- se traduit par une variation des longueurs.

Dans la suite de ce chapitre, nous introduirons une mesure de la distorsion angulaire et une mesure de la variation des longueurs. Ces mesures doivent être locales, puisque les distorsions du réseau peuvent varier dans le solide.

4.2 Gradient d'une transformation

4.2.1 Tenseur gradient d'une transformation

Définition

Soit un référentiel R dans lequel on a choisi un repère R constitué d'une origine O et de la base cartésienne orthonormée. Soit C une partie quelconque d'un système matériel. On désigne par κ_0 la configuration de C à l'instant initial et par κ_t sa configuration à l'instant t . Considérons deux points matériels Q et P occupant à l'instant initial les positions Q_0, P_0 et à l'instant t les positions Q_t, P_t . Dans la configuration initiale Q_0 et P_0 sont décrit par deux vecteurs

$$\overrightarrow{OP_0} = \vec{X} = X_P \vec{e}_P \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OQ_0} = \vec{Y} = Y_P \cdot \vec{e}_P$$

L'un des objectifs fixés dans l'introduction est de savoir si la distance entre les points P_t et Q_t

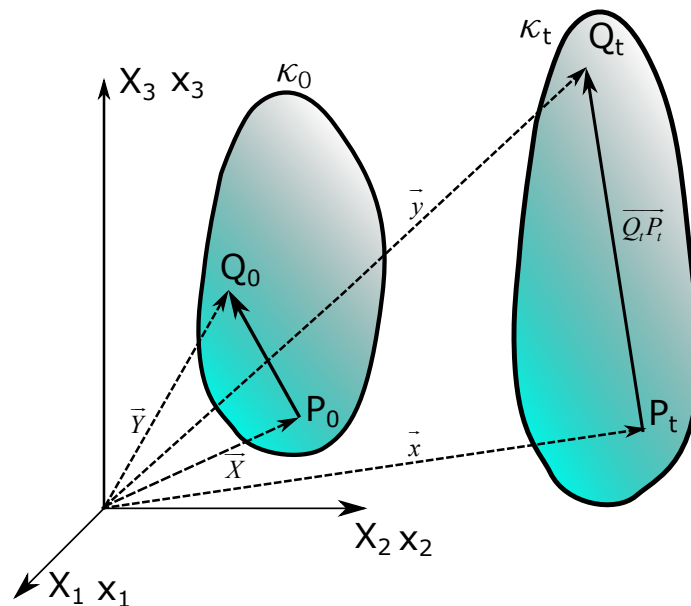


FIGURE 4.2 – Configuration initiale et actuelle d'un solide déformé.

change au cours de la transformation. Pour estimer la distance entre P_t et Q_t nous exprimons le vecteur $\overrightarrow{P_t Q_t}$ en fonction du vecteur.

Le passage de la configuration initiale à la configuration à l'instant t peut être décrit par la transformation. Le vecteur $\overrightarrow{P_t Q_t}$ peut donc s'écrire :

$$\overrightarrow{P_t Q_t} = \overrightarrow{OQ_t} - \overrightarrow{OP_t} = \vec{y} - \vec{x} = \vec{\phi}(\vec{Y}, t) - \vec{\phi}(\vec{X}, t)$$

$$y_i - x_i = \phi_i(Y_1, Y_2, Y_3) - \phi_i(X_1, X_2, X_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Le vecteur $\overrightarrow{P_t Q_t}$ est l'accroissement de la fonction ϕ pour un accroissement de la variable égal à un développement limité au premier ordre donné :

$$y_i - x_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_p} (X_1, X_2, X_3) (Y_p - X_p) + \left[(Y_1 - X_1)^2 + (Y_2 - X_2)^2 + (Y_3 - X_3)^2 \right]^{1/2} \alpha_i (Y_1 - X_1, Y_2 - X_2, Y_3 - X_3, t)$$

où α_i est une fonction qui tend vers 0 si Y_i tend vers X_i .

Sous forme vectorielle on peut écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} &= \overline{\overline{F}}(\overrightarrow{X}, t) (\overrightarrow{Y} - \overrightarrow{X}) + \overline{\overline{\alpha}}(\overrightarrow{Y} - \overrightarrow{X}, t) \|\overrightarrow{Y} - \overrightarrow{X}\| \\ \overrightarrow{P_t Q_t} &= \overline{\overline{F}}(\overrightarrow{OP_0}, t) \overrightarrow{P_0 Q_0} + \overline{\overline{\alpha}}(\overrightarrow{P_0 Q_0}, t) \|\overrightarrow{P_0 Q_0}\| \end{aligned}} \quad (4.1)$$

Le tenseur $\overline{\overline{F}}(\overrightarrow{X}, t) = \overrightarrow{grad} [\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{X}, t)]$ est appelé tenseur **gradient de la transformation**. $\overline{\overline{F}}$ dépend du point considéré Q_0 et du temps t . Les composantes de $\overline{\overline{F}}$ sont données par :

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\overline{F}}(\overrightarrow{X}, t) &= \overrightarrow{grad} [\overrightarrow{\phi}(\overrightarrow{X}, t)] = \overrightarrow{grad} [\overrightarrow{x}(\overrightarrow{X}, t)] \\ F_{ij} &= \frac{\partial x^j}{\partial X^i} \end{aligned}} \quad (4.2)$$



Karl Jacobi
1804 - 1851

R Charles Gustave Jacob Jacobi, né en 1804, est un mathématicien allemand surtout connu pour ses travaux sur les intégrales elliptiques, les équations aux dérivées partielles et leur application à la mécanique analytique. Il était le frère du physicien Moritz von Jacobi, découvreur de la galvanoplastie.

Exemple

La figure 4.3 montre une transformation particulière. Le solide entier est d'abord translaté de 4 unités dans la direction x_1 . Puis une transformation appelée glissement simple est appliquée. La transformation peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 4 \\ x_2 = 3 \cdot \frac{X_2}{2} \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

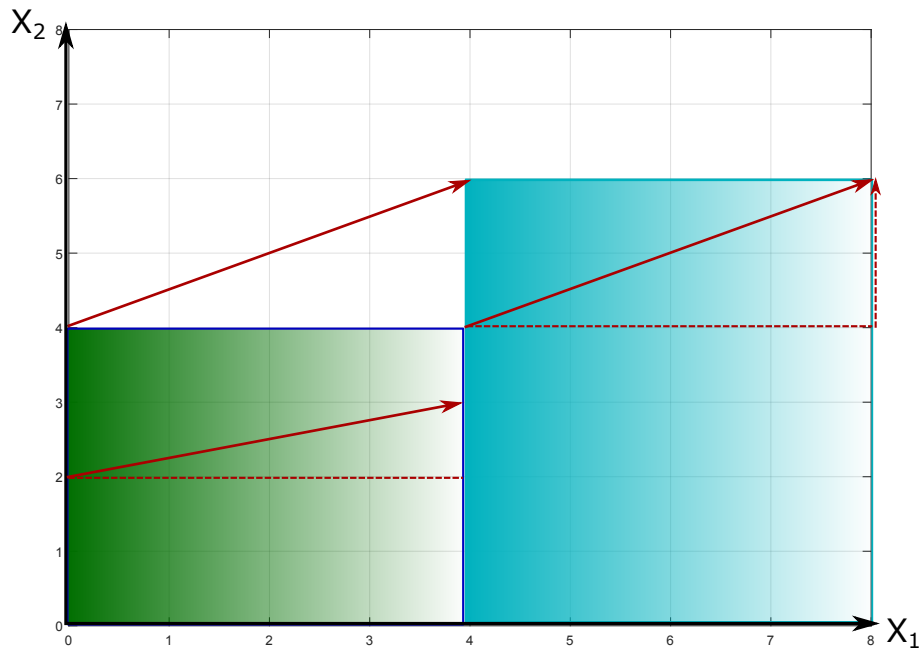


FIGURE 4.3 – Exemple de transformation particulière : glissement simple avec translation.

Le tenseur gradient de la transformation s'écrit :

$$\overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La translation de 4 unités dans la direction des x_1 positif n'intervient pas dans le tenseur gradient de la transformation. Dans la suite, un mouvement d'ensemble d'un solide sera appelé mouvement rigide ou mode rigide. Le tenseur gradient de cette transformation ne dépend pas des coordonnées de la configuration initiale. Ce type de transformations est appelé transformation homogène.

Transformations homogènes

Si le tenseur $\overline{\overline{F}}$ ne dépend pas du point matériel P_O , la transformation est dite homogène.

$$\boxed{\vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t) = \overline{\overline{F}}(t) \vec{X} + \vec{B}(t)} \quad (4.3)$$

Interprétation géométrique du tenseur gradient

La figure (4.4a, 4.4b 4.5a et 4.5b) montre l'indentation d'un solide par un cylindre indéformable. Les figures 4.4a et 4.4b correspondent à la configuration non déformée. Cette configuration sera adoptée comme configuration initiale C_0 . Les figures 4.5a et 4.5b correspondent à la configuration déformée, soit C_t . Le segment de droite $L_0 = P_0Q_0$ de la configuration initiale se transforme un arc de courbe $L_t = P_tQ_t$

$$\overrightarrow{P_tQ_t} = \overline{\overline{F}}(\overrightarrow{OP_0}, t) \overrightarrow{P_0Q_0} + \vec{\alpha}(\overrightarrow{P_0Q_0}, t) \left\| \overrightarrow{P_0Q_0} \right\|$$

Posons :

$$\overrightarrow{P_tQ_t} = \overline{\overline{F}}(\overrightarrow{OP_0}, t) \overrightarrow{P_0Q_0} + \vec{\alpha}(\overrightarrow{P_0Q_0}, t) \left\| \overrightarrow{P_0Q_0} \right\|$$

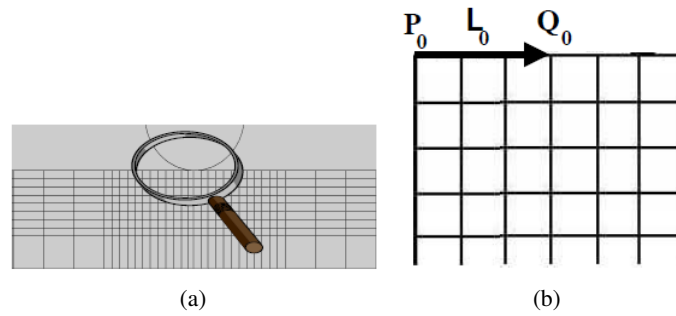


FIGURE 4.4 – Indentation d'un solide par un cylindre infini en configuration non déformée prise comme référence

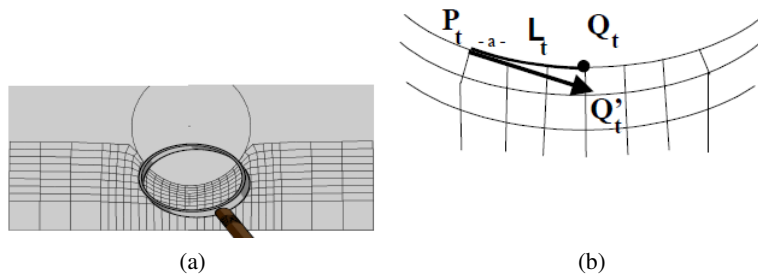


FIGURE 4.5 – Indentation d'un solide par un cylindre infini en configuration non déformée prise comme configuration déformée

On peut écrire :

$$\overrightarrow{P_t Q_t} = \overrightarrow{P_t Q_t'} + \overrightarrow{\alpha}(P_0 Q_0, t) \left\| \overrightarrow{P_0 Q_0} \right\|$$

Notations différentielles

L'équation 4.1 est exacte quelle que soit la longueur du vecteur $\overrightarrow{P_0 Q_0}$. Toutefois le vecteur $\overrightarrow{P_t Q_t'} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{OP_0}, t) \overrightarrow{P_0 Q_0}$ ne sera une bonne approximation du vecteur $\overrightarrow{P_t Q_t}$ que si Q_0 est proche de P_0 . Dans la suite, nous considérons que les points P_0 et Q_0 sont infiniment proche, soit $\overrightarrow{P_0 Q_0} = d\vec{X}$, $\overrightarrow{P_t Q_t'} = d\vec{x}$.

Si l'on pose (figure 4.6) $\overrightarrow{P_t Q_t} = \overrightarrow{OQ_t} - \overrightarrow{OP_t} = \vec{y} - \vec{x} = \Delta\vec{x}$ et $\overrightarrow{P_0 Q_0} = \overrightarrow{OQ_0} - \overrightarrow{OP_0} = \vec{Y} - \vec{X} = d\vec{X}$, l'équation 4.3 devient :

$$\Delta\vec{x} = d\vec{x} + \overrightarrow{\alpha}(d\vec{X}) \left\| d\vec{X} \right\| \tag{4.4}$$

Confondre le vecteur $\overrightarrow{P_t Q_t}$ avec $\overrightarrow{P_t Q_t'}$ revient donc à approcher l'accroissement $\Delta\vec{x}$ de la fonction $\overrightarrow{\phi}(\vec{X}, t)$ par le vecteur $d\vec{x}$

4.2.2 Transport convectif d'un vecteur

Éléments d'arc, élément de surface, élément de volume

Dans la configuration de référence κ_0 , soit un arc de courbe L_0 passant par P_0 . Au voisinage du point on peut approcher cet arc par le vecteur tangent $d\vec{X}$. $d\vec{X}$ Sera appelé vecteur élémentaire.

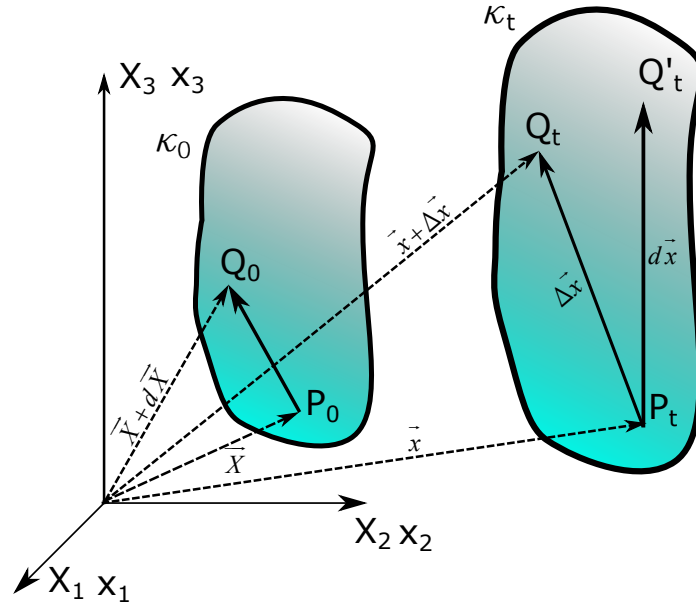


FIGURE 4.6 – Passage de la représentation pour des quantités finies à des quantités différentielles.

Un élément de surface élémentaire dS_0 sera un parallélogramme construit à partir de deux vecteurs élémentaires $d\vec{X}$ et $d\vec{X}'$ issus de P_0 . Un élément de volume élémentaire dV_0 est un parallélépipède construit à partir de trois vecteurs élémentaires $d\vec{X}$, $d\vec{X}'$ et $d\vec{X}''$. Dans la configuration actuelle κ_t , le transporté L_t de l'arc L_0 sera confondu avec le vecteur $d\vec{x}$, transporté du vecteur $d\vec{X}$. Le transporté dS_t de la surface dS_0 sera confondu avec la surface portée par les vecteurs $d\vec{x}$ et $d\vec{x}'$, transportés de $d\vec{X}$ et $d\vec{X}'$.

Transport convectif d'un vecteur élémentaire

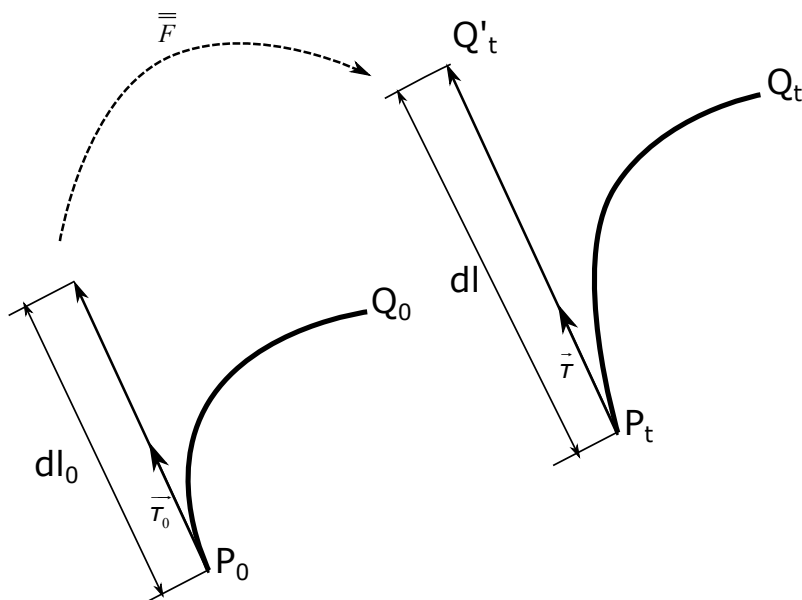


FIGURE 4.7 – transport d'un vecteur élémentaire.

Considérons un arc de courbe L_0 passant par les points P_0 et Q_0 (Figure 4.7) dans la configuration de référence. Dans la configuration actuelle, l'arc de courbe L_0 se transforme en l'arc de

courbe L_t passant par $P_t Q_t$. Cet arc de courbe sera approché par le transporté du vecteur $d\vec{X}$ soit $d\vec{x}$. Introduisons les vecteurs unitaires $\vec{\tau}_0$ et $\vec{\tau}$ tels que $d\vec{X} = dl_0 \vec{\tau}_0$ et $d\vec{x} = dl \vec{\tau}$, comme $d\vec{x} = \bar{F} d\vec{X}$

$$\vec{\tau} dl = \bar{F} \vec{\tau}_0 dl_0 \quad (4.5)$$

en résumé, localement, un vecteur élémentaire \vec{X} se transforme en \vec{x} , tel que :

$$d\vec{x} = \bar{F} d\vec{X} \quad (4.6)$$

4.3 Tenseur des dilatations

Considérons de nouveau le problème de l'indentation d'un solide par un cylindre infinie (Figure 4.8). Nous proposons de comparer les longueurs et les angles dans la configuration de référence et dans la configuration actuelle. La variation de longueur dépend de l'orientation du segment considéré dans la configuration de référence. La mesure la plus adéquate à notre problème semble donc être le produit scalaire de deux vecteurs élémentaires. En effet, le produit scalaire tient compte de l'orientation relative des vecteurs. Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même permet d'estimer les longueurs. Le produit scalaire de deux vecteurs différents permet d'estimer l'angle formé par ces vecteurs.

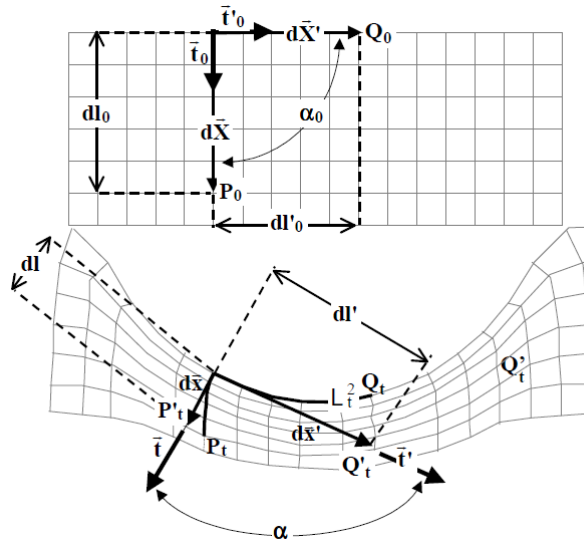


FIGURE 4.8 – Indentation d'un solide par un cylindre infinie. Configuration de référence et configuration déformée.

4.3.1 Tenseur des dilatations

Définition

Calculons donc le produit scalaire : $d\vec{x}^T \cdot d\vec{x} = (\bar{F} d\vec{X})^T \bar{F} d\vec{X}$

$$d\vec{x}^T \cdot d\vec{x} = d\vec{X}^T [\bar{F}^T \bar{F}] d\vec{X}$$

$$d\vec{x}^T \cdot d\vec{x} = d\vec{X}^T [\bar{F}^T \bar{F}] d\vec{X} = d\vec{X}^T \bar{C} d\vec{X}$$

Le tenseur des dilatations de Gauchy-Green

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}^T \overline{F}} \quad (4.7)$$



Louis Augustin Cauchy
1789 - 1857

R Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris en 1789 et mort à Sceaux en 1857, est un mathématicien français, membre de l'École polytechnique. Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps, avec près de 800 parutions et sept ouvrages.

Le tenseur $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}^T \overline{F}}$ est appelé tenseur des dilatations de Gauchy-Green. Ce tenseur dépend de la configuration initiale et permet de calculer le produit scalaire de deux vecteurs dans la position actuelle en fonction du produit scalaire des vecteurs correspondants dans la configuration initiale. Comme, en tant que forme linéaire, il s'applique sur deux vecteurs relatifs à la configuration initiale, on dira que $\overline{\overline{C}}$ est un tenseur lagrangien. Les composantes du tenseur $\overline{\overline{C}}$ sont adimensionnelles.

Propriétés du tenseur des dilatations de Gauchy-Green

$\overline{\overline{C}}$ est symétrique (i.e. égal à son transposé). En effet :

$$\overline{\overline{C}}^T = \left(\overline{\overline{F}^T \overline{F}} \right)^T = \overline{\overline{F}} \left(\overline{\overline{F}^T} \right)^T = \overline{\overline{F}^T \overline{F}} = \overline{\overline{C}}$$

La forme bilinéaire $\overrightarrow{X}^T \overline{\overline{C}} \overrightarrow{X}$ est définie positive. En effet,

$$\det \left[\overline{\overline{C}} \right] = \det \left[\overline{\overline{F}^T \overline{F}} \right] = \det \left(\overline{\overline{F}} \right)^2 = J^2 > 0 \quad \text{et} \quad d\overrightarrow{X}^T \overline{\overline{C}} d\overrightarrow{X} = \|d\overrightarrow{x}\|^2 > 0$$

4.3.2 Dilatation dans une direction

Soit un vecteur élémentaire $\overrightarrow{M_0 M_0'} \in \kappa_0$, de longueur l_0 . $\overrightarrow{M_t M_t'}$ de longueur l_t son transformé dans κ_t . $\overrightarrow{M_0 M_0'}$ a pour direction le vecteur unitaire τ figure 4.9.

$$\overrightarrow{M_0 M_0'} = l_0 \tau$$

. Calculons alors la longueur l_t de $\overrightarrow{M_t M_t'}$ en fonction de celle de $\overrightarrow{M_0 M_0'}$. D'après l'équation 4.6, on a :

$$\overrightarrow{M_t M_t'} = \overline{\overline{F}} \overrightarrow{M_0 M_0'}$$

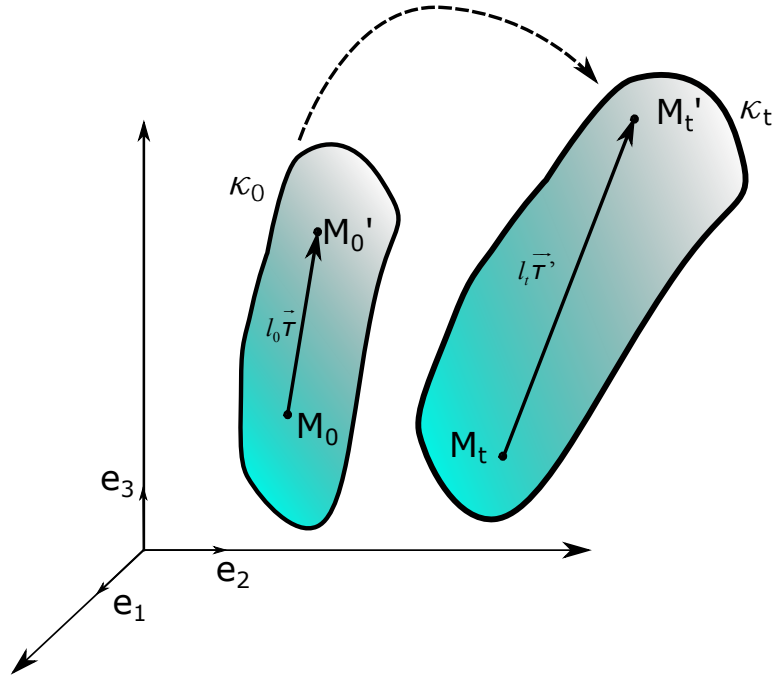


FIGURE 4.9 – Evolution des longueurs.

Nous avons :

$$l_t = |\overrightarrow{M_t M_t'}| = \sqrt{\overrightarrow{M_t M_t'} \cdot \overrightarrow{M_t M_t'}}$$

$$l_t = \sqrt{\overrightarrow{F M_0 M_0'} \cdot \overrightarrow{F M_0 M_0'}} = \sqrt{\overrightarrow{M_0 M_0'} \cdot \overrightarrow{F^T} \cdot \overrightarrow{F M_0 M_0'}}$$

$$l_t = \sqrt{l_0 \overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{F^T} \cdot \overrightarrow{F} \cdot l_0 \overrightarrow{\tau}}$$

$$l_t = l_0 \sqrt{\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{F^T} \cdot \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\tau}}$$

Notons $\lambda(\tau)$, l'allongement unitaire dans la direction $\overrightarrow{\tau}$

$$\lambda(\tau) = \frac{l_t - l_0}{l_0}$$

$$\lambda(\tau) = \frac{l_0 \sqrt{\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{F^T} \cdot \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\tau}} - l_0}{l_0}$$

$$\lambda(\tau) = \sqrt{\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{F^T} \cdot \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\tau}} - 1$$

L'allongement unitaire dans la direction $\overrightarrow{\tau}$ est donné en fonction du tenseur des dilatations de Cauchy-Green $\overrightarrow{\overline{C}}$:

$$\lambda(\tau) = \sqrt{\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{\overline{C}} \cdot \overrightarrow{\tau}} - 1 \quad (4.8)$$

Finalement la longueur du vecteur $\overrightarrow{M_t M_t'}$ est donné par :

$$l_t = l_0 \sqrt{\overrightarrow{\tau} \cdot \overrightarrow{\overline{C}} \cdot \overrightarrow{\tau}} \quad (4.9)$$

4.3.3 Glissement de deux directions orthogonales

La variation de métrique induit des variations d'angle. On s'intéresse en particulier à la variation d'angle de deux vecteurs initialement orthogonaux, figure 4.10. Soit deux vecteurs \vec{U} et \vec{V}

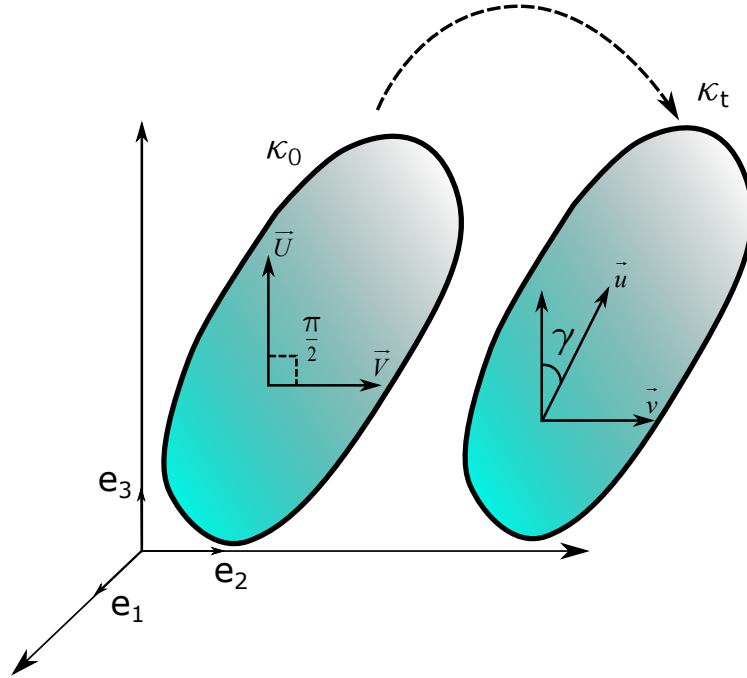


FIGURE 4.10 – Evolution des angles.

initialement orthogonaux dans κ_0

$$\begin{aligned}\vec{U} &= l_0 \vec{\tau} \\ \vec{V} &= l_0' \vec{\tau}' \\ (\vec{\tau}, \vec{\tau}') &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

L'image de \vec{U} dans κ_t est le vecteur \vec{u} de longueur l_t , celle de \vec{V} est le vecteur \vec{v} de longueur l_t' tel que :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overline{\overline{F}} \vec{U} \\ \vec{v} &= \overline{\overline{F}} \vec{V}\end{aligned}$$

On appelle glissement entre les deux directions orthogonales $\vec{\tau}$ et $\vec{\tau}'$, l'angle γ , tel que :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

Il est facile de montrer que :

$$\boxed{\sin(\gamma) = \frac{\vec{\tau}' \overline{\overline{C}} \vec{\tau}}{\sqrt{\vec{\tau} \overline{\overline{C}} \vec{\tau}} \sqrt{\vec{\tau}' \overline{\overline{C}} \vec{\tau}'}}} \quad (4.10)$$

4.3.4 Évolution des volumes

Soit M_0 un point de la configuration κ_0 . Considérons un parallélépipède élémentaire de sommet M_0 construit à partir des trois vecteurs élémentaires $d\vec{X}_1$, $d\vec{X}_2$ et $d\vec{X}_3$, figure 4.11 Son volume

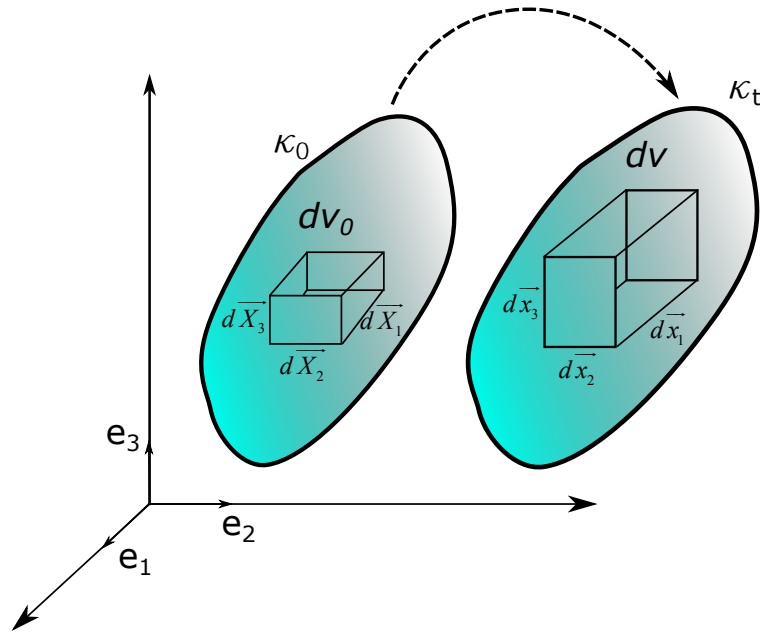


FIGURE 4.11 – Evolution des volumes.

algébrique est donné par :

$$dv = d\vec{x}_1 \cdot (d\vec{x}_2 \wedge d\vec{x}_3)$$

On a la propriété suivante :

$$\boxed{dv = \det(\overline{\overline{F}}) dv_0} \quad (4.11)$$

avec :

$$\det(\overline{\overline{F}}) = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right|, \quad i, j = 1, 2, 3$$

On note $\det(\overline{\overline{F}}) = J$ le jacobien de la transformation. Finalement, un volume élémentaire dv_0 appartenant à κ_0 se transforme en dv dans κ_t par :

$$\boxed{dv = J dv_0} \quad (4.12)$$

- R** $\vec{\phi}$ est bijective, bicontinu et continûment dérivable. On en déduit que $J(\vec{X}, t)$ est continu par rapport à \vec{X} et t . De plus $J(\vec{X}, t)$ ne peut être ni nul ni infini car les matrices jacobiennes de $\vec{\phi}$ et $\vec{\phi}^{-1}$ doivent être inversibles. $J(\vec{X}, t)$ conserve donc un signe constant au cours de la transformation. Or on a :

$$J(\vec{X}, 0) = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = 1 > 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

d'où :

$$\forall t, 0 < J < +\infty$$

4.3.5 Décomposition polaire

Dans ce paragraphe, on se propose de se munir d'un outil pouvant caractériser le tenseur gradient de transformation $\overline{\overline{F}}$.

Directions principales et dilatations principales du tenseur de Cauchy

Le tenseur des dilatations de Cauchy est symétrique défini positif; il est donc diagonalisable. Ses valeurs propres ($C_i; i = 1, 2, 3$) sont strictement positives; $C_i = \lambda_i^2; i = 1, 2, 3$ et ses vecteurs propres sont orthogonaux deux à deux. Soit $\vec{U}_i; i = 1, 2, 3$ ses vecteurs propres dans κ_0 . On obtient alors :

$$\vec{U}_i \cdot \vec{U}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (4.13)$$

Soient $\vec{u}_i; i = 1, 2, 3$ les vecteurs de κ_t transportés convectifs des \vec{U}_i par \bar{F} :

$$\vec{u}_i = \bar{F} \vec{U}_i$$

Calculons le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j &= \bar{F} \vec{U}_i \cdot \bar{F} \vec{U}_j \\ &= \vec{U}_i \cdot \bar{F}^T \bar{F} \cdot \vec{U}_j \\ &= \vec{U}_i \cdot \bar{C} \cdot \vec{U}_j \\ &= \vec{U}_i \cdot \lambda_j^2 \cdot \vec{U}_j \\ &= \lambda_j^2 \cdot \delta_{ij} \end{aligned}$$

D'où la proposition suivante : les directions principales du tenseur de Cauchy \bar{C} dans κ_0 sont transportées convectivement dans κ_t selon les directions orthogonales. Lors de la transformation, les vecteurs de la base principale de \bar{C} dans κ_0 subissent une rotation et une dilatation, figure 4.12.

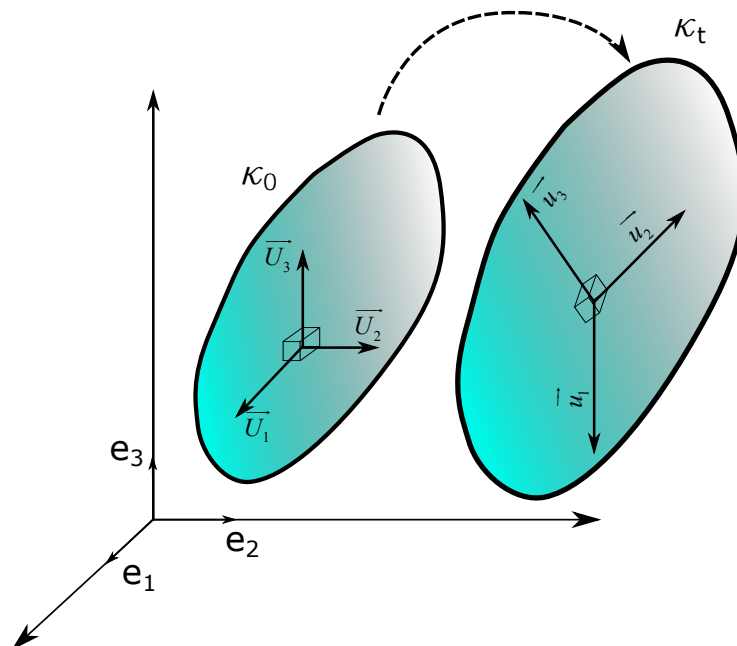


FIGURE 4.12 – Transformation de la base principale du tenseur de dilatation de Cauchy.

Décomposition polaire

Afin de caractériser le tenseur $\overline{\overline{F}}$, on peut caractériser la matrice associée à l'application linéaire correspondante à $\overline{\overline{F}}$. Il suffit pour cela de calculer les images des vecteurs d'une base (on peut choisir la base principale de $\overline{\overline{C}}$). d'après la proposition $\overline{\overline{F}}$ se décompose **d'une manière unique** en une rotation et une déformation pure, figure 4.12.

$$\boxed{\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{R}} \cdot \overline{\overline{V}}} \quad (4.14)$$

Le tenseur $\overline{\overline{R}}$ représente une rotation qui fait tourner les vecteurs de la base $(\vec{U}_i)_{i=1,2,3}$; $\overline{\overline{R}}^T \cdot \overline{\overline{R}} = \overline{\overline{I}}$.

Le tenseur $\overline{\overline{V}}$ symétrique se contente de « dilater » les vecteurs propres de la base $(\vec{U}_i)_{i=1,2,3}$. On parle de déformation pure.

4.4 Tenseurs des déformations

4.4.1 Tenseur de Green-Lagrange

La notion intuitive de déformation d'un système naît de la comparaison entre une configuration initiale et une configuration finale. On peut intuitivement dire qu'un système matériel ne se déforme pas entre t_0 et t si les distances et les angles sont conservés. L'outil mathématique qui nous permet de quantifier ces grandeurs est le produit scalaire. Par conséquent, une comparaison des produits scalaires des deux vecteurs dans κ_0 puis κ_t nous permet de définir la notion de déformation.

Soit deux vecteurs \vec{X} et \vec{Y} appartenant à κ_0 , ces deux vecteurs se transforment respectivement en \vec{x} et \vec{y} dans κ_t , figure 4.13.

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \kappa_t &\Rightarrow \vec{x} = \overline{\overline{F}} \cdot \vec{X} \\ \vec{y} \in \kappa_t &\Rightarrow \vec{y} = \overline{\overline{F}} \cdot \vec{Y} \end{aligned}$$

La différence des produits scalaires donne :

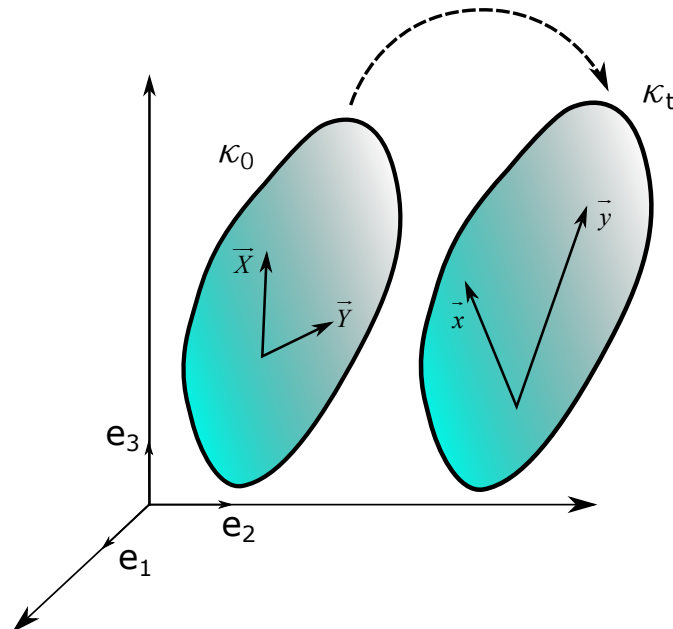


FIGURE 4.13 – Transformation de la base principale du tenseur de dilatation de Cauchy.

$$(\vec{x} \cdot \vec{y}) - (\vec{X} \cdot \vec{Y}) = (\overline{\overline{F}} \cdot \vec{X} \cdot \overline{\overline{F}} \cdot \vec{Y}) - (\vec{X} \cdot \vec{Y})$$

$$\begin{aligned}
&= (\vec{X} \cdot \overline{\overline{F}}^T \cdot \overline{\overline{F}} \cdot \vec{Y}) - (\vec{X} \cdot \vec{Y}) \\
&= \vec{X} \cdot (\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}}) \cdot \vec{Y}
\end{aligned}$$

où $\overline{\overline{I}}$ désigne le tenseur identité.

Le tenseur $2\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}}$ nous permet de "mesurer" la variation du produit scalaire des deux vecteurs lors de la transformation.

Le tenseur,

$$\overline{\overline{L}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}}) \quad (4.15)$$

est appelé **tenseur de déformation de Green-Lagrange**.

R $\overline{\overline{L}}$ est un tenseur symétrique d'ordre 2, il est donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont données en fonction de celles de $\overline{\overline{C}}$ par :

$$l_i = \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1)$$

On se propose d'utiliser le tenseur de Green-Lagrange $\overline{\overline{L}}$ pour recalculer la différence de métrique entre les deux configurations κ_0 et κ_t .

Allongement unitaire

D'après l'équation 4.8, l'allongement unitaire dans la direction $\vec{\tau}$ est donné par :

$$\lambda(\tau) = \sqrt{\vec{\tau} \cdot \overline{\overline{C}} \cdot \vec{\tau}} - 1$$

en utilisant 4.15, on remplace $\overline{\overline{C}}$ par sa valeur. On obtient ainsi :

$$\lambda(\vec{\tau}) = \sqrt{\overline{\overline{I}} + 2\vec{\tau} \cdot \overline{\overline{L}} \cdot \vec{\tau}} - 1 \quad (4.16)$$

glissement entre deux directions

Les équations 4.9 et 4.15 donnent :

$$\sin(\gamma) = \frac{2\vec{\tau}' \cdot \overline{\overline{L}} \cdot \vec{\tau}}{\sqrt{1 + 2\vec{\tau}' \cdot \overline{\overline{L}} \cdot \vec{\tau}} \sqrt{1 + 2\vec{\tau} \cdot \overline{\overline{L}} \cdot \vec{\tau}}} \quad (4.17)$$

dilatation volumique

La dilatation volumique est donnée par :

$$dv = J dv_0$$

avec $J = \sqrt{\det(\overline{\overline{C}})}$. L'équation 4.15 permet d'obtenir :

$$dv = \sqrt{\det(\overline{\overline{I}} + 2\overline{\overline{L}})} dv_0 \quad (4.18)$$

- R** Pourquoi utilise-t-on le tenseur $\bar{\bar{L}}$ au lieu de $\bar{\bar{C}}$ pour décrire la déformation d'un milieu continu ? La réponse est liée au mouvement de corps rigide. D'après la décomposition polaire et en absence de dilatation, on a :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{R}}$$

d'où :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{R}}^T \cdot \bar{\bar{R}} = \bar{\bar{I}}$$

Or la déformation dans un mouvement rigidifiant est nulle, ce que $\bar{\bar{C}}$ ne vérifie pas. Il est évident que cette propriété est vérifiée par le tenseur $\bar{\bar{L}}$.

4.5 Formulation en fonction des déplacements

4.5.1 déplacements

Definition 4.5.1 — déplacements. On appelle déplacement de la particule M , située en M_0 de coordonnées \vec{X} dans κ_0 et en M_t de coordonnées \vec{x} dans κ_t , le vecteur $\vec{\xi}$ défini par :

$$\vec{\xi}(\vec{X}, t) = \overrightarrow{M_0 M_t} = \vec{x} - \vec{X} \quad (4.19)$$

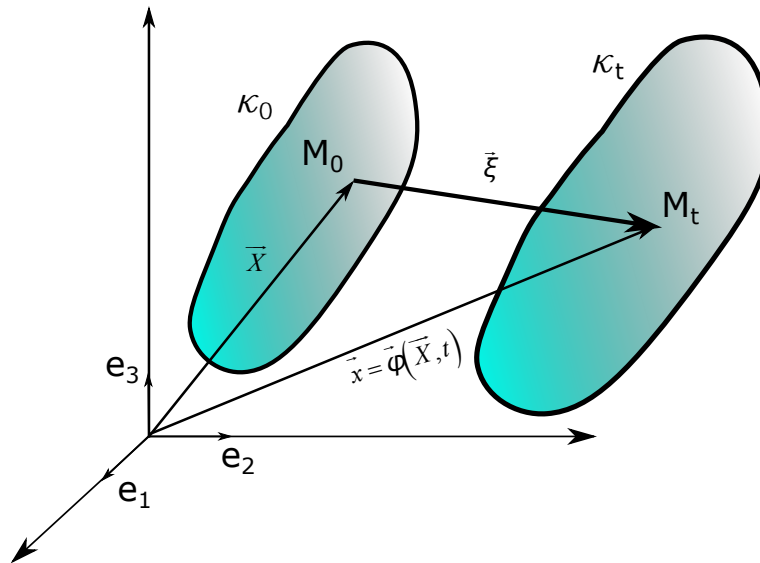


FIGURE 4.14 – Déplacement d'un point matériel.

On définit un vecteur déplacement pour chaque particule M du milieu continu, il s'agit donc d'un **champ** de vecteurs défini sur κ_0 .

Il est souvent plus commode d'exprimer les tenseurs introduits jusqu'à présent à l'aide du vecteur déplacement.

4.5.2 Le tenseur gradient de transformation

D'après les équations 4.3 et 4.19, nous avons :

$$\vec{\phi}(\vec{X}, t) = \vec{x}$$

$$= \vec{\xi} + \vec{X}$$

Or :

$$\bar{F} = \overline{\nabla \phi}$$

D'où :

$$\boxed{\bar{F} = \bar{I} + \overline{\nabla \xi}} \quad (4.20)$$

4.5.3 Le tenseur de dilatation de Cauchy

Le tenseur \bar{C} est donné par :

$$\bar{C} = \bar{F}^T \cdot \bar{F}$$

En utilisant l'équation 4.20, on obtient :

$$\boxed{\bar{C} = \bar{I} + \overline{\nabla \xi} + \overline{\nabla \xi}^T + \overline{\nabla \xi}^T \cdot \overline{\nabla \xi}} \quad (4.21)$$

4.5.4 Le tenseur de déformation de Green-Lagrange

Le tenseur \bar{L} est donné par :

$$\bar{L} = \frac{1}{2} (\bar{C} - \bar{I})$$

En utilisant l'équation 4.21, on obtient :

$$\boxed{\bar{L} = \frac{1}{2} (\overline{\nabla \xi} + \overline{\nabla \xi}^T + \overline{\nabla \xi}^T \cdot \overline{\nabla \xi})} \quad (4.22)$$

4.6 Hypothèse des petites déformations

La plupart des structures qui intéressent l'ingénieur se déforment peu, et ce même si elles subissent de grands déplacements.

Definition 4.6.1 — Hypothèse des petites déformations. On dit que les déformations entre les instants 0 et t sont petites en M_0 si, en ce point, les valeurs propres du tenseur \bar{L} sont petites devant 1 ($l_i \ll 1$). Notons l_i les valeurs propres de \bar{L} . L'équation 4.15 donne alors :

$$\boxed{l_i = \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) \Leftrightarrow \lambda_i = (2l_i^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \simeq l_i + 1} \quad (4.23)$$

4.6.1 Conséquences

Allongement unitaire dans la direction $\vec{\tau}$

$$\lambda(\vec{\tau}) = \vec{\tau} \cdot \bar{L} \cdot \vec{\tau} = \sqrt{2 + 2l_i} - 1 \simeq l_i$$

Évolution des volumes

$$J = \left(\det(\bar{I} + 2\bar{L}) \right)^{\frac{1}{2}} \simeq \bar{I} + tr(\bar{L})$$

4.7 Hypothèse des petites transformations

Definition 4.7.1 — Hypothèse des petites déformations. On dit que les transformations entre les instants 0 et t sont petites en M_0 si, en ce point, toutes les composantes du tenseur $\overline{\overline{\nabla \xi}}(\vec{X}, t)$ sont petite devant 1

$$\left\| \overline{\overline{\nabla \xi}}(\vec{X}, t) \right\| \ll 1 \quad \forall M_0 \in \kappa_0 \quad (4.24)$$

4.7.1 Conséquences

- Les valeurs propres de $\overline{\overline{L}}$ sont également petites. L'hypothèse des petites transformations implique celle des petites déformations. La réciproque n'est pas toujours vraie.
- comme $\left\| \overline{\overline{\nabla \xi}}(\vec{X}, t) \right\|$ est pris comme infiniment petit principal, on peut négliger, dans l'expression de $\overline{\overline{L}}$, les termes quadratiques $\overline{\overline{\nabla \xi}}^T \cdot \overline{\overline{\nabla \xi}}$. On envisage ainsi un processus de linéarisation :

$$\left[\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\nabla \xi}} + \overline{\overline{\nabla \xi}}^T) \right] \quad (4.25)$$

$\overline{\overline{\varepsilon}}$ est le tenseur symétrique de déformation linéarisé.
On définit également le tenseur antisymétrique $\overline{\overline{\omega}}$ par :

$$\left[\overline{\overline{\omega}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\nabla \xi}} - \overline{\overline{\nabla \xi}}^T) \right] \quad (4.26)$$

- Relation entre $\overline{\overline{U}}$ et $\overline{\overline{\varepsilon}}$:

$$\overline{\overline{U}} \approx \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\varepsilon}}$$

- Allongement unitaire dans la direction $\vec{\tau}$

$$\lambda(\vec{\tau}) \approx \vec{\tau} \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{\tau}$$

- Évolution des volumes

$$J = \overline{\overline{I}} + tr(\overline{\overline{\varepsilon}}) \simeq 1 + div(\vec{\xi})$$

4.8 Conditions de compatibilité

Dans ce paragraphe, nous étudions les conditions à remplir par un champ de déformation pour qu'il puisse être intégré et donner lieu à un champ de déplacement continu. Imaginez un puzzle. Si l'on déforme les pièces du puzzle de façon indépendante, rien ne garantit que l'on puisse les juxtaposer après déformation sans plis ou vides. Le champ de déformation doit donc remplir certaines conditions pour correspondre à un champ de déplacements continu. Ces conditions sont appelées conditions de compatibilité.

4.8.1 Unicité du champ de déplacement

Avant d'étudier les conditions de compatibilité, nous étudions l'unicité du champ de déplacement. Considérons les déformations sous l'hypothèse des petites transformations.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i} \right)$$

Les composantes du tenseur gradient des déplacements et les composantes du tenseur petites rotations s'écrivent respectivement :

$$H_{ij} = \nabla \xi_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial X_i} \right)$$

Les dérivées des composantes du tenseur rotation s'expriment en fonction des différences de petites déformations. En effet, considérons les dérivées partielles des composantes du tenseur rotation

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial X_j \partial X_k} - \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial X_i \partial X_k} \right)$$

En ajoutant et soustrayant le terme $(\partial^2 \xi_k / \partial X_i \partial X_j) / 2$, l'expression précédente peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial X_j \partial X_k} + \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial X_i \partial X_j} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial X_i \partial X_j} + \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial X_i \partial X_k} \right)$$

Nous supposons que le champ de déplacement est deux fois continûment dérivable. Ainsi nous pouvons intervertir l'ordre des dérivées partielles et faire apparaître les dérivées des composantes du tenseur déformation :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial X_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial X_i} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial X_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial X_k} \right) \right\}$$

soit :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial X_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial X_i}$$

Si les déformations ($\bar{\varepsilon} = 0$) sont nuls, le tenseur des rotations $\bar{\omega}$ est constant et le tenseur gradient des déplacements \bar{H} est égal au tenseur des rotations $\bar{\omega}$

$$\bar{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \bar{\omega} = \overline{Cst}, \quad \bar{H} = \bar{\omega}$$

Le champ de déplacements correspondant à une translation $\vec{\xi}_0$ et une rotation de corps solide

$$H_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} = \omega_{ij}(t) \Rightarrow \xi_i = \omega_{ij}(t) X_j + \xi_0$$

Ainsi, la connaissance du champ des déformations définit le champ de déplacement à une rotation de corps solide et une translation près.

4.8.2 Existence d'un champ de déplacement : conditions de compatibilité

Avant d'étudier les conditions de compatibilité, nous étudions l'unicité du champ de

$$\boxed{\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial X_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial X_i}} \quad (4.27)$$

Une condition suffisante pour que ce système différentiel soit intégrable est

$$\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial X_k \partial X_l} = \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial X_l \partial X_k} \quad (l \neq k)$$

L'équation correspondante sur les composantes du tenseur déformation est

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial X_j \partial X_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial X_j \partial X_k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial X_i \partial X_k}} \quad (4.28)$$

Compte tenu des symétrie, il reste 6 relations indépendantes à satisfaire. Les équations précédentes nous assurent que le système d'équations 4.27 est intégrable. On peut donc déterminer le tenseur rotation $\bar{\omega}$ si l'on connaît le tenseur des déformations $\bar{\epsilon}$. Ainsi, le tenseur gradient des déplacements \bar{H} est défini. La question est maintenant si l'on peut remonter au déplacements à partir de la connaissance du tenseur . Autrement dit le système

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial X_j} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

est il intégrable? La réponse sera positive si $\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial X_j \partial X_l} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial X_l \partial X_j} (l \neq j)$ soit

$$\frac{\partial}{\partial X_l} (\epsilon_{ij} + \omega_{ij}) = \frac{\partial}{\partial X_j} (\epsilon_{il} + \omega_{il}) (l \neq j)$$

Or cette égalité est bien satisfaite d'après les relations 4.27. Le passage de \bar{H} à \bar{H} n'introduit donc pas de condition de compatibilité supplémentaires. Les 6 relations indépendantes parmi les équations 4.28 peuvent s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} &= \frac{\partial}{\partial X_1} \left\{ \frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial X_2} + \frac{\partial \epsilon_{21}}{\partial X_3} - \frac{\partial \epsilon_{32}}{\partial X_1} \right\} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} &= \frac{\partial}{\partial X_2} \left\{ \frac{\partial \epsilon_{21}}{\partial X_3} + \frac{\partial \epsilon_{32}}{\partial X_1} - \frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial X_2} \right\} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} &= \frac{\partial}{\partial X_3} \left\{ \frac{\partial \epsilon_{32}}{\partial X_1} + \frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \epsilon_{21}}{\partial X_3} \right\} \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial X_1^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial X_2^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{31}}{\partial X_3 \partial X_1} &= \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial X_3^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Les relations de compatibilité peuvent se mettre sous une forme plus condensée, si l'on adopte la notation symbolique de Gibbs. En notation indicielle d'Einstein, les relations de compatibilité s'écrivent :

$$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial X_k \partial X_k} \epsilon_{ij}}_{\Delta \epsilon_{ij}} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} \overbrace{\epsilon_{kk}}^{\text{trace}(\bar{\epsilon})}}_{\overrightarrow{\text{grad}}\{\overrightarrow{\text{grad}}[\text{trace}(\bar{\epsilon})]\}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial}{\partial X_k} \epsilon_{ik} \right)}_{\overrightarrow{\text{grad}}[\text{div}(\bar{\epsilon})]} - \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} \epsilon_{jk} = 0$$

Ce qui conduit à l'expression suivante en notation de Gibbs :

$$\Delta(\bar{\epsilon}) + \overrightarrow{\text{grad}}\{\overrightarrow{\text{grad}}[\text{trace}(\bar{\epsilon})]\} = \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div}(\bar{\epsilon})] + \left\{ \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div}(\bar{\epsilon})] \right\}^T \quad (4.30)$$

4.9 Exercice

4.9.1 Enoncé

On considère un mouvement défini par les equations :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha.t.X_2 \\ x_2 = X_2 + \alpha.t.X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Avec : $\alpha > 0$

On suppose que la configuration de référence Ω_0 est un volume de particules qui occupe un cube de côté $2l$ et de centre O

1. Calculer pour tout instant t le volume $\gamma(t)$ du domaine Ω constituant la configuration déformée.
2. Tracer la courbe $\gamma(t)$ en fonction du temps avec $\alpha = 1$. En déduire le temps t_* à partir duquel le mouvement cesse d'être physique.
3. Calculer la dilatation relative autour d'un point X quelconque de ω_0 dans la direction 1 engendré par le vecteur e_1
4. Angle de glissement $\gamma_{12}(t)$
5. Calculer la dilatation relative autour d'un point X quelconque de ω_0 dans la direction engendré par les vecteurs $v_1 = e_1 + e_2$ et $v_2 = e_1 - e_2$
6. Calculer l'angle de glissement entre ces deux directions.

4.9.2 Solution

- Calculer pour tout instant t le volume $\gamma(t)$ du domaine Ω constituant la configuration déformée.

Calcul de la matrice de transformation $\overline{\overline{F}}$:

$$\overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha.t & 0 \\ \alpha.t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le volume $\gamma(t)$ du domaine Ω constituant la configuration déformée :

$$\gamma(t) = J.\gamma(0)$$

Avec :

$$J = \det(\overline{\overline{F}})$$

$$J = (1 - \alpha^2.t^2)$$

$$\gamma(0) = 8.l^3$$

- Tracer la courbe $\gamma(t)$ en fonction du temps avec $\alpha = 1$. En déduire le temps t_* à partir duquel le mouvement cesse d'être physique.

$$\alpha = 1$$

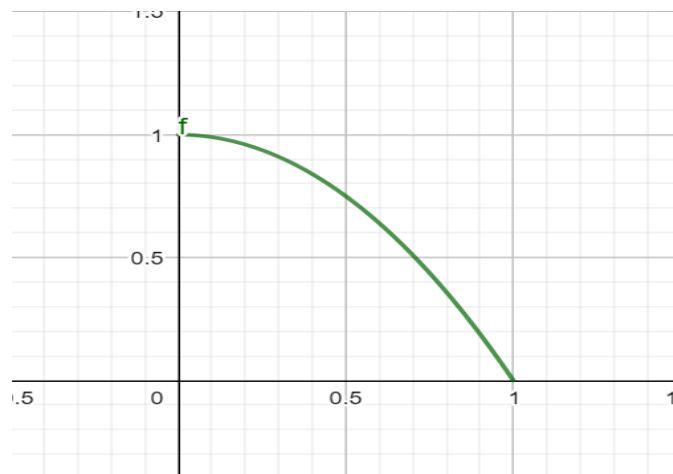


FIGURE 4.15 – Variation du volume $\gamma(t)$ en fonction du temps .

le temps t_* à partir duquel le mouvement cesse d'être physique :

$$J > 0$$

$$J = (1 - \alpha^2.t^2) > 0$$

$$\Rightarrow J < \frac{1}{\alpha}$$

— Calculer la dilatation relative autour d'un point X quelconque de ω_0 dans la direction 1 engendré par le vecteur e_1 .

Calcul du tenseur de dilatation :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{F}}$$

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha.t & 0 \\ \alpha.t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha.t & 0 \\ \alpha.t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2.t^2 & 2.\alpha.t & 0 \\ 2.\alpha.t & 1 + \alpha^2.t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la dilatation relative autour d'un point X quelconque de ω_0 dans la direction 1 engendré par le vecteur e_1 :

$$\frac{l}{l_0} = \sqrt{\vec{e}_1 \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \vec{e}_1}$$

avec :

$$\vec{e}_1 \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2.t^2 & 2.\alpha.t & 0 \\ 2.\alpha.t & 1 + \alpha^2.t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous avons :

$$\frac{l}{l_0} = \sqrt{1 + \alpha^2.t^2}$$

— Angle de glissement $\gamma_{12}(t)$.

$$\sin(\gamma_{12}) = \frac{\vec{e}_1 \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \vec{e}_2}{\sqrt{\vec{e}_1 \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \vec{e}_1} \cdot \sqrt{\vec{e}_2 \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \vec{e}_2}}$$

$$\vec{e}_1 \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2.t^2 & 2.\alpha.t & 0 \\ 2.\alpha.t & 1 + \alpha^2.t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_1 \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \vec{e}_2 = 2.\alpha.t$$

$$\vec{e}_2 \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2.t^2 & 2.\alpha.t & 0 \\ 2.\alpha.t & 1 + \alpha^2.t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_2 \cdot \bar{\bar{C}} \cdot \vec{e}_2 = 1 + \alpha^2.t^2$$

$$\gamma_{12} = \text{Arcsin}\left(\frac{2.\alpha.t}{1 + \alpha^2.t^2}\right)$$

— Calculer la dilatation relative autour d'un point X quelconque de ω_0 dans la direction engendré par les vecteurs $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ et $\vec{v}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$

On normalise le vecteur \vec{v}_1 :

$$\vec{v}_1^* = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La dilatation relative autour d'un point X quelconque de ω_0 dans la direction engendré par les vecteurs \vec{v}_1 :

$$\frac{l}{l_0} = \sqrt{\vec{v}_1^* \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \vec{v}_1^*}$$

$$\vec{v}_1^* \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \vec{v}_1^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2 t^2 & 2\alpha t & 0 \\ 2\alpha t & 1 + \alpha^2 t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{l}{l_0} = 1 + \alpha t$$

On normalise le vecteur \vec{v}_2 :

$$\vec{v}_2^* = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La dilatation relative autour d'un point X quelconque de ω_0 dans la direction engendré par les vecteurs \vec{v}_2 :

$$\frac{l}{l_0} = \sqrt{\vec{v}_2^* \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \vec{v}_2^*}$$

$$\vec{v}_2^* \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \vec{v}_2^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2 t^2 & 2\alpha t & 0 \\ 2\alpha t & 1 + \alpha^2 t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

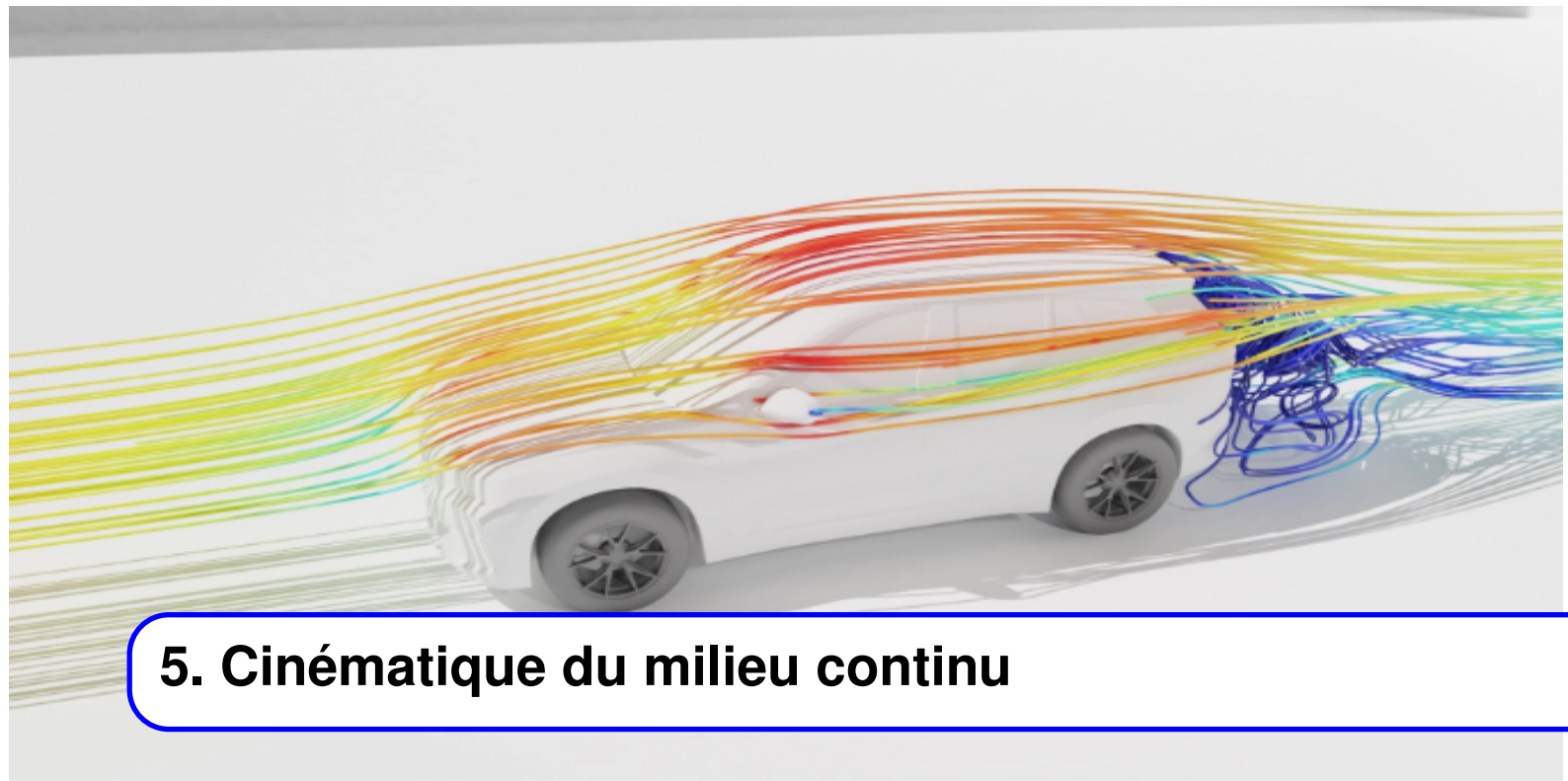
$$\frac{l}{l_0} = 1 - \alpha t$$

— Calculer l'angle de glissement entre ces deux directions.

$$\sin(\gamma) = \frac{\vec{v}_1^* \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \vec{v}_2^*}{\sqrt{\vec{v}_1^* \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \vec{v}_1^*} \cdot \sqrt{\vec{v}_2^* \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \vec{v}_2^*}}$$

$$\vec{v}_1^* \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \vec{v}_2^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2 t^2 & 2\alpha t & 0 \\ 2\alpha t & 1 + \alpha^2 t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\sin(\gamma) = 0$$



5. Cinématique du milieu continu

5.1 Introduction

Au chapitre précédent on s'est attaché à la comparaison entre la configuration de référence et la configuration actuelle, essentiellement au plan géométrique, sans considération de l'histoire intermédiaire du système étudié. Comme on l'a dit alors, l'argument t intervenait dans les diverses expressions comme le paramètre indexant la configuration actuelle.

On se propose maintenant de suivre l'évolution du système en fonction de la variable temps. On s'intéressera d'abord à l'aspect purement géométrique de cette évolution : c'est l'étude de la cinématique du milieu continu tridimensionnel. À partir de celle-ci on examinera d'autres aspects de cette évolution, notamment en considérant les grandeurs physiques attachées au système ou à ses éléments constitutifs, dans leurs représentations eulériennes, et les dérivations temporelles de ces grandeurs.

Sous une forme suggestive, qui se réfère au propos initial concernant le chapitre précédent, on pourrait décrire l'objet du présent chapitre comme le suivi du « film » de l'évolution du système par la comparaison de ses images « vue par vue ».

Definition 5.1.1 — Description Eulérienne. La description eulérienne permet une description incrémental de l'évolution d'un milieu continu. Elle consiste principalement à suivre l'évolution du système pas à pas dans le temps, autrement dit, une fois calculée, la configuration actuelle κ_t est prise comme configuration de référence pour calculer la configuration κ_{t+dt}

5.2 Tenseur gradient des vitesses

Afin de décrire la cinématique du milieu continu, on écrit les équations en vitesse. Soit un vecteur élémentaire \vec{dx} appartenant à la configuration actuelle κ_{t+dt} . On calcule la variation temporelle de \vec{dx} soit $\dot{\vec{dx}}$ lors du passage de κ_t à κ_{t+dt} .

Pour ce faire, utilisons, **artificiellement**, la configuration initiale κ_0 . D'après l'équation 4.7 :

$$\vec{dx} = \overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X}$$

d'où :

$$\dot{\vec{dx}} = \frac{d(\overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X})}{dt} = \frac{d(\overline{\overline{\nabla\phi}} \cdot \overline{\overline{F}}^{-1} \cdot d\vec{x})}{dt} = \overline{\overline{\nabla}} \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \cdot \overline{\overline{F}}^{-1} \cdot d\vec{x} = \overline{\overline{\nabla V}}(\vec{X}, t) \overline{\overline{F}}^{-1} \cdot d\vec{x} \quad (5.1)$$

Or on à :

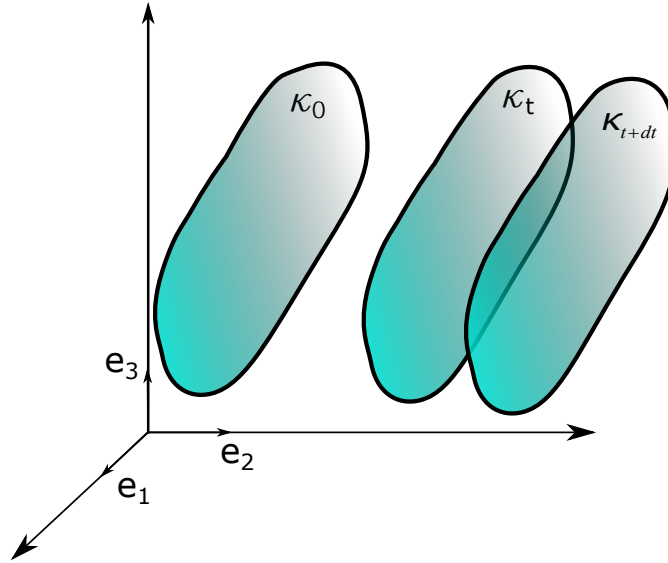


FIGURE 5.1 – Cinématique du milieu continu.

$$\vec{V}(\vec{X}, t) = \vec{V}(\vec{x}, t)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\nabla V}}(\vec{X}, t) \cdot d\vec{X} &= \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{x} \\ &= \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t) \cdot \overline{\overline{F}} \cdot d\vec{X} \end{aligned}$$

En multipliant l'équation précédente des deux cotés par $\overline{\overline{F}}^{-1}$, on obtient :

$$\overline{\overline{\nabla V}}(\vec{X}, t) \cdot \overline{\overline{F}}^{-1} = \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t) \quad (5.2)$$

Finalement, en reportant l'équation 5.2 dans l'équation 5.1, on obtient :

$$\dot{\vec{dx}} = \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{x} \quad (5.3)$$

Definition 5.2.1 — Tenseur gradient des vitesses. $\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t)$ est le tenseur gradient eulérien des vitesses. Ce tenseur permet le passage instantané de la configuration actuelle κ_t à la configuration κ_{t+dt} . Il joue, en description eulérienne, le même rôle que celui joué par le gradient de transformation $\overline{\overline{F}}$ en description lagrangienne.

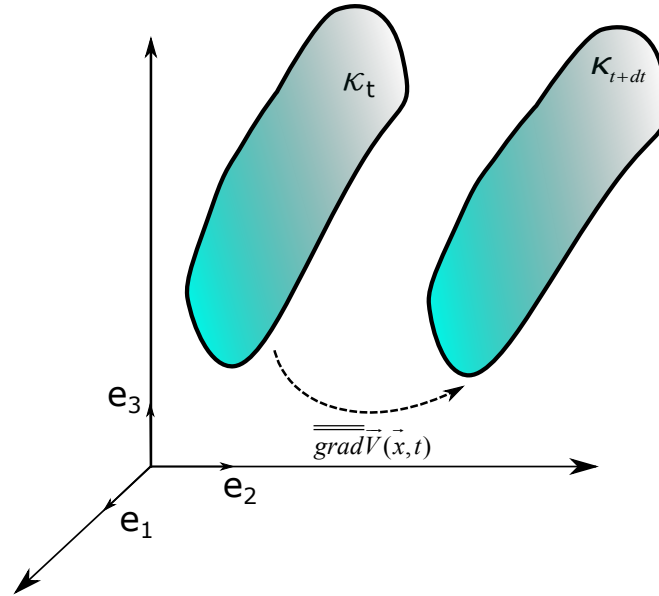


FIGURE 5.2 – Définition du tenseur gradient des vitesses.

5.3 Tenseur taux des déformations

Tout comme en description lagrangienne, et à partir de la formule 5.3, on peut calculer la dérivée particulière du produit scalaire des deux vecteurs élémentaires \vec{dx} et \vec{dx}' appartenant à κ

$$\begin{aligned}
 \vec{dx}' \cdot \vec{dx} &= \vec{dx} \cdot \vec{dx}' + \vec{dx} \cdot \vec{dx}' \\
 &= \overline{\text{grad}} \vec{V}(\vec{x}, t) \cdot \vec{dx} \cdot \vec{dx}' + \vec{dx} \cdot \overline{\text{grad}} \vec{V}(\vec{x}, t) \cdot \vec{dx}' \\
 &= \vec{dx} \cdot \overline{\text{grad}} \vec{V}(\vec{x}, t) \cdot \vec{dx}' + \vec{dx} \cdot \overline{\text{grad}} \vec{V}(\vec{x}, t) \cdot \vec{dx}' \\
 &= \vec{dx} \cdot \left(\overline{\text{grad}} \vec{V}(\vec{x}, t) + \overline{\text{grad}} \vec{V}(\vec{x}, t) \right) \cdot \vec{dx}' \\
 &= 2 \cdot \vec{dx} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \vec{dx}'
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Avec :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{\text{grad}} \vec{V}(\vec{x}, t) + {}^T \overline{\text{grad}} \vec{V}(\vec{x}, t) \right) \tag{5.5}$$

Definition 5.3.1 — Tenseur taux des déformations. $\overline{\overline{D}}$ est le tenseur taux des déformations. Il s'agit de la partie symétrique du tenseur gradient des vitesses. le tenseur $\overline{\overline{D}}$ caractérise l'évolution de la métrique, c'est-à-dire la déformation rapportée à la configuration actuelle qui joue, ainsi, à chaque instant, le rôle de configuration de référence.

5.3.1 Taux de variation des longueurs

Comme en description lagrangienne, on calcule maintenant le taux de variation de la métrique du milieu continu. Soit un vecteur élémentaire \vec{dx} de direction unitaire $\vec{\tau}$ et de longueur l .

$$\vec{dx} = l \vec{\tau}$$

En calculant le carré de la norme de ce vecteur et en dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\vec{dx} \cdot \vec{dx} = l^2 \Rightarrow \dot{\vec{dx}} \cdot \vec{dx} = 2.l \cdot \dot{l}$$

Or, d'après (5.4) on a :

$$\dot{\vec{dx}} \cdot \vec{dx} = 2 \cdot \vec{dx} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \vec{dx} = 2.l \cdot \vec{\tau} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot l \cdot \vec{\tau}$$

En égalisant les deux précédentes équations, on obtient le taux de variation de l par :

$$\boxed{\frac{\dot{l}}{l} = \vec{\tau} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \vec{\tau}} \quad (5.6)$$

5.3.2 Taux de glissement de deux direction

Considérons deux directions définies par les vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ et $\vec{\tau}'$, orthogonaux au point \vec{x} à l'instant t . A un instant $t' = t + dt$, ces deux vecteurs forment un angle égale $(\frac{\pi}{2} - \gamma)$, figure 5.3. Or,

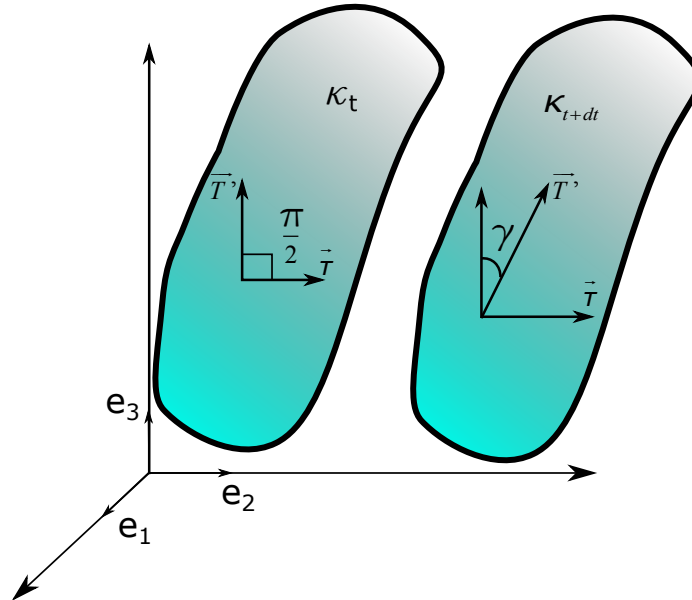


FIGURE 5.3 – Taux de glissement.

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin(\gamma)$$

comme $\gamma = 0$ à l'instant t , on obtient :

$$\boxed{\dot{\gamma} = 2 \vec{\tau} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \vec{\tau}'} \quad (5.7)$$

5.3.3 Taux de variation de volume

Le taux de variation de volume est donné par :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = \text{div} \vec{V} = \frac{J}{J}} \quad (5.8)$$

R Dans le cas d'un fluide incompressible, le taux de variation de volume est nul, d'où $\text{div} \vec{V} = 0$

5.4 Tenseur Taux de rotation

Le tenseur $\overline{\overline{D}}$ ayant été défini comme la partie symétrique du tenseur gradient des vitesses $\overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}}$, sa partie antisymétrique est donné par :

$$\overline{\overline{\Omega}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}(\vec{x}, t)} - {}^T \overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}(\vec{x}, t)} \right) \quad (5.9)$$

A ce tenseur, on peut associer un vecteur dual $\vec{\Omega} / \overline{\overline{\Omega}} \cdot \vec{u} = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$. On montre que :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} \quad (5.10)$$

Le vecteur $\vec{\Omega}$ est appelé vecteur taux de rotation ou vecteur tourbillon¹.

R D'après l'équation 5.3, on a :

$$\dot{\vec{x}} = \overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}(\vec{x}, t)} \cdot \vec{dx} = (\overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}}) \cdot \vec{dx} = \overline{\overline{D}} \cdot \vec{dx} + \vec{\Omega} \wedge \vec{dx}$$

Soit les trois directions principales de $\overline{\overline{D}}$, $\vec{dx}_i, i = 1, 2, 3$ et les trois valeurs propres associées $d_i, i = 1, 2, 3$. On a dans ce cas :

$$\dot{\vec{dx}}_i = d_i \cdot \vec{dx}_i + \vec{\Omega} \wedge \vec{dx}_i, i = 1, 2, 3$$

La vitesse $\dot{\vec{dx}}_i$ entre $t + dt$ est composée d'un allongement unitaire $d_i dt$ et d'une rotation instantanée $\vec{\Omega} dt$. Ceci justifie la dénomination de $\vec{\Omega}$: vecteur rotation ou tourbillon.

5.5 Dérivée particulière

Tout au long des paragraphes précédents, nous avons vu qu'il est parfois difficile de se référer à une configuration initiale pour étudier le mouvement d'un milieu continu. Bien que cette situation soit évidente en Mécanique des fluides, l'analyse nécessite le calcul des taux de variation des quantités rattachées à des particules en mouvement. Pour ce faire, on définit un outil mathématique. Il s'agit de la notion de dérivée particulière ou de dérivée matérielle.

5.5.1 Notion intuitive

Il s'agit de caractériser la variation au cours du temps d'une grandeur attachée à une particule ou à un ensemble de particules suivies dans leur mouvement. En un point donné (\vec{x} fixé), La grandeur varie en fonction du temps et à un instant donné (t fixé) elle dépend du point dans lequel on la considère.

1. Cette notion est très utile comme vous le verrez en cours de Mécanique des fluides.

■ **Exemple 5.1** Imaginez que vous vous déplacez par voiture de Setif à Alger et que vous souhaitez connaître la température extérieure. La variation de la température dépend de deux facteurs :

1. La température varie dans le même lieu au cours de la journée; c'est l'instationnarité marquée par la dépendance de T par rapport à t , \vec{x} étant figé. Par exemple, à Setif, la température du matin est différente de celle du soir : $T(09h) \neq T(16h) \Rightarrow T = T(t)$.
2. Le fait que vous vous déplacez et passez en des endroits différents qui, au même instant, ne sont pas à la même température; il s'agit de la dépendance de T par rapport à \vec{x} , t étant figé. Il est clair que cette dépendance par rapport à l'espace (\vec{x}) dépend de la vitesse à laquelle vous roulez.

Finalement, on peut schématiquement formuler que :

La variation de T = variation due à t + variation due au mouvement donc, à \vec{x} (terme convectif).

5.5.2 Dérivé particulière d'une fonction de points

La quantité à dériver est ici attachée à une seule particule \vec{X} en mouvement. Cette particule occupe des positions géométriques \vec{x} différente au cours du temps.

Fonction scalaire :

$$f = f(\vec{x}, t) / \vec{x} = \phi(\vec{X}, t)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

d'où :

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \overrightarrow{grad}f \cdot \vec{V}} \quad (5.11)$$

La dérivée particulière est composée de deux termes :

- $\frac{\partial f}{\partial t}$: Variation de f au point géométrique \vec{x} en fonction du temps. Ce terme correspond à la seule cause de variation de f lorsque la particule est immobile à l'instant t , c'est-à-dire lorsque son mouvement est tel que $\vec{V} = 0$
- $\overrightarrow{grad}f \cdot \vec{V}$: terme correspondant à la variation de f due au mouvement de la particule, donc due à son transport convectif par le mouvement (\vec{V}). Ce terme constitue la seule cause de variation de f lorsque cette dernière est indépendante du temps $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. ce terme est appelé terme de convection.

(R) En description lagrangienne, la dérivée particulière s'identifie à la dérivée partielle par rapport au temps. En effet, on a : $f = f(\vec{X}, t) \Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}$ car \vec{X} est toujours figé. La formule établie précédemment est valable quel que soit l'ordre tensoriel de f .

Fonction vectorielle :

$$f = \vec{f}(\vec{x}, t) / \vec{x} = \vec{\phi}(\vec{X}, t)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}f \cdot \vec{V}} \quad (5.12)$$

Pour chaque composante, on a :

$$\boxed{\frac{df_i}{dt} = f_{i,t} + f_{i,j} \cdot V_j} \quad (5.13)$$

En description eulérienne, l'accélération d'une particule est donnée par la dérivée particulaire de la vitesse :

$$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \vec{V} \cdot \vec{V}} \quad (5.14)$$

Fonction tensorielle d'ordre 2 :

$$f = \bar{f}(\vec{x}, t) / \vec{x} = \bar{\phi}(\vec{X}, t)$$

$$\boxed{\frac{d\bar{f}}{dt} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \overline{\overline{\text{grad}}} \bar{f} \cdot \vec{V}} \quad (5.15)$$

Pour chaque composante, on a :

$$\boxed{\frac{df_{ij}}{dt} = f_{ij,t} + f_{ij,p} \cdot V_p} \quad (5.16)$$

5.5.3 Dérivé particulaire d'une intégrale de volume

On s'intéresse maintenant à la variation, par rapport au temps, d'une quantité attachée à un ensemble de particules : un volume. $f(\vec{x}, t)$ est ici une densité volumique. Soit l'intégrale de volume I définie sur un volume γ_t délimité par la frontière $\partial\gamma_t$, figure 5.4 :

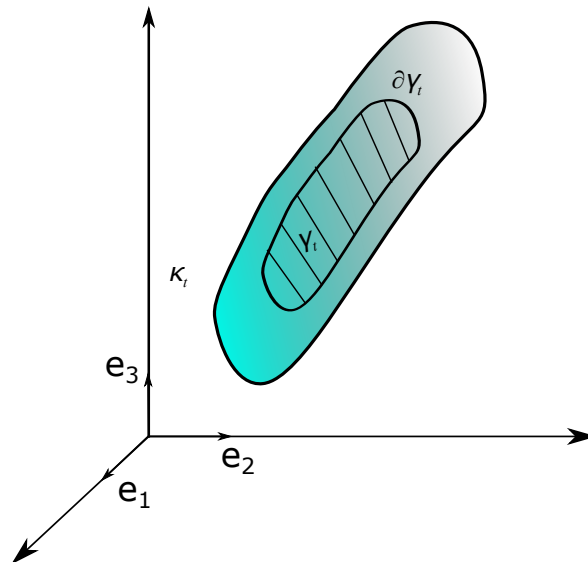


FIGURE 5.4 – Dérivé particulaire d'une intégrale de volume.

$$\boxed{I = \int_{\gamma_t} f(\vec{x}, t) dv} \quad (5.17)$$

■ **Exemple 5.2** Si $f(\vec{x}, t)$ représente la densité volumique de masse (ou masse volumique) $\rho(\vec{x}, t)$, la masse M d'un volume γ_t est alors donnée par :

$$M = \int_{\gamma_t} \rho(\vec{x}, t) dv$$

■

Notre but est de calculer la variation par rapport au temps de la quantité I , soit :

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} f(\vec{x}, t) dv} \quad (5.18)$$

La difficulté réside dans le fait que le domaine d'intégration γ_t varie dans le temps. Afin de surmonter cette difficulté, on ramène l'intégrale à la configuration de référence, le domaine d'intégration devient alors fixe (γ_0). On calcule la dérivée pour, ensuite, revenir aux variables d'Euler en procédant aux changement de variables adéquats.

Cas où

$f(\vec{x}, t)$ est continue :

La variation de I est donnée par :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} f(\vec{x}, t) dv$$

D'après l'équation (4.12), on a $dv = Jdv_0$, d'où, en passant à la configuration de référence :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\gamma_0} f(\vec{X}, t) J dv_0$$

Le domaine d'intégration γ_0 étant fixe. On peut donc écrire :

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_0} \frac{d(f(\vec{X}, t) J)}{dt} dv_0$$

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_0} \left[\frac{df}{dt} J + \frac{dJ}{dt} f \right] dv_0$$

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_0} \frac{df}{dt} J dv_0 + \int_{\gamma_0} j f dv_0$$

Or, d'après la formule 5.8, on a : $j = J \operatorname{div} \vec{V}$

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_0} \frac{df}{dt} J dv_0 + \int_{\gamma_0} f \operatorname{div} \vec{V} J dv_0$$

Il suffit maintenant d'exprimer cette expression dans la configuration actuelle en fonction des variables d'Euler :

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_t} \frac{df}{dt} dv + \int_{\gamma_t} f \operatorname{div} \vec{V} dv$$

En calculant la dérivée particulaire de f avec la formule 5.11, on obtient :

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_t} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{V} + f \text{div} \vec{V} \right] dv$$

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_t} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} (f \vec{V}) \right] dv$$

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_t} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\gamma_t} \text{div} (f \vec{V}) dv$$

En faisant appel au théorème de la divergence², on obtient :

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_t} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial \gamma_t} f \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} ds} \tag{5.19}$$

- $\int_{\gamma_t} \frac{\partial f}{\partial t} dv$: Terme dû à la variation de I par rapport au temps.
- $\int_{\partial \gamma_t} f \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} ds$: Terme de convection.

Cas où

$f(\vec{x}, t)$ est discontinue :

On suppose que $f(\vec{x}, t)$ est discontinue à travers une surface Σ_t de vecteur normal \vec{N} orienté du coté (1) vers le coté (2) se déplaçant à une vitesse \vec{W} , figure 5.5.

On note la discontinuité de f à travers Σ : $\|f\| = f_2(\vec{x}, t) - f_1(\vec{x}, t)$

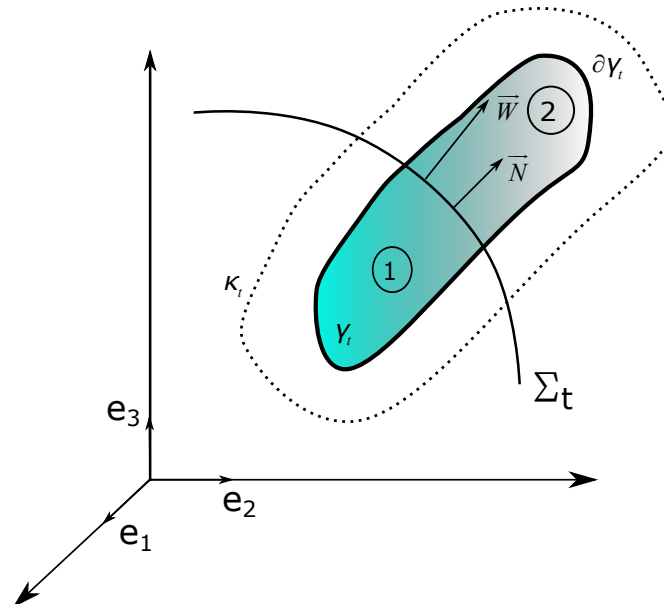


FIGURE 5.5 – Présence d’une discontinuité.

2. Soit g une fonction continue sur un domaine occupant le volume γ_t . on note \vec{n} le vecteur normal à $\partial \gamma_t$. On a le théorème suivant : $\int_{\gamma_t} \text{div}(g) dv = \int_{\partial \gamma_t} g \cdot \vec{n} ds$.

L'intégrale I peut se décomposer en :

$$I = I_1 + I_2$$

où :

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f(\vec{x}, t) dv$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} f(\vec{x}, t) dv$$

de sorte que :

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt}} \quad (5.20)$$

Il suffit de calculer séparément $\frac{dI_1}{dt}$ et $\frac{dI_2}{dt}$ en utilisant la formule (5.4) :

$$\frac{dI_1}{dt} = \int_{\gamma_1} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial\gamma_1 \cap \partial\gamma_i} f \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} ds + \int_{\Sigma_t} f_1 \cdot \vec{W} \cdot \vec{N} d\Sigma$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \int_{\gamma_2} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial\gamma_2 \cap \partial\gamma_i} f \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} ds + \int_{\Sigma_t} f_2 \cdot \vec{W} \cdot (-\vec{N}) d\Sigma$$

L'équation (5.20) donne :

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_i} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial\gamma_i} f \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} ds - \int_{\Sigma_t} [|f|] \cdot \vec{W} \cdot \vec{N} d\Sigma$$

En utilisant le théorème de la divergence généralisé³, on a :

$$\int_{\partial\gamma_i} f \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \int_{\gamma_i} \text{div}(f \cdot \vec{V}) dv + \int_{\Sigma_t} [|f \vec{V}|] \cdot \vec{N} d\Sigma$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = \int_{\gamma_i} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \cdot \vec{V}) \right] dv + \int_{\Sigma_t} [|f(\vec{V} - \vec{W})|] \cdot \vec{N} d\Sigma} \quad (5.21)$$

$(\vec{V} - \vec{W})$ représente la vitesse relative de la particule par rapport à la surface de discontinuité Σ_t .

R la surface Σ n'est pas une surface particulière (ou matérielle) mais plutôt une surface géométrique.

5.6 Exercice

5.6.1 Enoncé

On considère un mouvement défini dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par sa représentation lagrangienne (ω est une constante positive) :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) - X_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ x_2 = X_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + X_2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

3. Soit g une fonction définie sur un domaine occupant le volume γ et discontinue à travers une surface Σ_t de vecteur normal \vec{N} . on note \vec{n} le vecteur normal à $\partial\gamma$. On a le théorème suivant : $\int_{\gamma} \text{div} g dv = \int_{\partial\gamma} g \cdot \vec{n} ds - \int_{\Sigma_t} [|g|] \cdot \vec{N} d\Sigma$

1. Calculer le tenseur gradient $\overline{\overline{F}}$, le tenseur de dilatation $\overline{\overline{C}}$, et le tenseur des déformations $\overline{\overline{E}}$ de ce mouvement au point \overrightarrow{X} et à l'instant t .
2. A quelle classe particulière ce mouvement appartient-il ?
3. Pour un instant t donné, calculer la dilatation en un point X et dans une direction \overrightarrow{dX}
4. Pour un instant t donné, calculer le glissement en un point X et pour deux directions \overrightarrow{dX} et $\overrightarrow{dX'}$
5. On considère un milieu animé de ce mouvement, muni d'une masse volumique homogène ρ_0 à l'instant $t_0 = 0$. Calculer le jacobien de la transformation, ainsi que la masse volumique du milieu à l'instant t .
6. Calculer le champ de vitesse $\overrightarrow{V}(\overrightarrow{X}, t)$ et le champ d'accélération $\overrightarrow{\gamma}(\overrightarrow{X}, t)$ en coordonnées lagrangiennes.
7. Calculer le champ de vitesse $\overrightarrow{V}(\overrightarrow{x}, t)$ et le champ d'accélération $\overrightarrow{\gamma}(\overrightarrow{x}, t)$ en coordonnées eulériennes.
8. Calculer les tenseurs des taux de déformations eulériens $\overline{\overline{D}}(\overrightarrow{x}, t)$ et des taux de rotation $\overline{\overline{\Omega}}(\overrightarrow{x}, t)$

5.6.2 Solution

— Calculer le tenseur gradient $\overline{\overline{F}}$, le tenseur de dilatation $\overline{\overline{C}}$, et le tenseur des déformations $\overline{\overline{E}}$ de ce mouvement au point \overrightarrow{X} et à l'instant t .

Le tenseur gradient est défini par la fonction $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$, donc :

$$\overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} \cos(\omega.t) & -\sin(\omega.t) & 0 \\ \sin(\omega.t) & \cos(\omega.t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour le tenseur des dilatations, on a $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^T \cdot \overline{\overline{F}}$ donc :

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} \cos^2(\omega.t) + \sin^2(\omega.t) & \cos(\omega.t) \cdot \sin(\omega.t) - \cos(\omega.t) \cdot \sin(\omega.t) & 0 \\ \cos(\omega.t) \cdot \sin(\omega.t) - \cos(\omega.t) \cdot \sin(\omega.t) & \cos^2(\omega.t) + \sin^2(\omega.t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \overline{\overline{I}}$$

Enfin, on sait que $\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}})$, et on a donc $\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{0}}$.

- Le tenseur des déformations est nul, on est donc en présence d'un mouvement rigidifiant.
- Puisque $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{I}}$, on peut dire que toute direction est direction principale. La dilatation dans une direction quelconque \overrightarrow{dX} vaut donc :

$$\lambda(\overrightarrow{dX}) = \sqrt{C_{ii}} = 1$$

- Pour la même raison, le glissement entre deux directions orthogonales quelconques \overrightarrow{dX} et $\overrightarrow{dX'}$ vaut :

$$\gamma(\overrightarrow{dX}, \overrightarrow{dX'}) = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}} \cdot \sqrt{C_{jj}}} = 0$$

- Le jacobien de la transformation est le déterminant de $\overline{\overline{F}}$, on a donc :

$$J = \det(\overline{\overline{F}}) = \begin{vmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

Par conséquent la masse volumique du milieu est constante dans le temps et en tout point.

— Le champ de vitesse $\vec{V}(\vec{X}, t)$ s'obtient par dérivation $\vec{V}(\vec{X}, t) = \frac{d\vec{x}(\vec{X}, t)}{dt}$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) - X_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ x_2 = X_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + X_2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = \omega \cdot (-X_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) - X_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) \\ V_2 = \omega \cdot (X_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) - X_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

— De même le champ d'accélération s'obtient par dérivation $\vec{\gamma}(\vec{X}, t) = \frac{d\vec{V}(\vec{X}, t)}{dt}$

$$\begin{cases} \gamma_1 = \omega^2 \cdot (-X_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + X_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \\ \gamma_2 = \omega^2 \cdot (-X_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) - X_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) \\ \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

— Pour Calculer le champ de vitesse $\vec{V}(\vec{x}, t)$ en coordonnées eulériennes, il faut en premier trouver la fonction $\vec{X} = f(\vec{x}, t)$.

$$x_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + x_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = X_1 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) + X_1 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) = X_1$$

$$-x_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + x_2 \cdot \cos(\omega \cdot t) = X_2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + X_2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) = X_2$$

En introduisant cette fonction dans l'expression du champ de vitesse en coordonnées lagrangiennes on aura :

$$\begin{cases} V_1 = \omega \cdot (-x_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + x_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \sin(\omega \cdot t) - (-x_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + x_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ V_2 = \omega \cdot (x_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + x_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \cos(\omega \cdot t) - (-x_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + x_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

— le champ de vitesse $\vec{V}(\vec{x}, t)$ en coordonnées eulériennes est :

$$\begin{cases} V_1 = -\omega \cdot x_2 \\ V_2 = \omega \cdot x_1 \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

On fera la même chose concernant l'expression de l'accélération :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \omega^2 \cdot (-x_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + x_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \cos(\omega \cdot t) + (-x_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + x_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ \gamma_2 = \omega^2 \cdot (-x_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + x_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \sin(\omega \cdot t) - (-x_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + x_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

— le champ d'accélération $\vec{\gamma}(\vec{x}, t)$ en coordonnées eulériennes est :

$$\begin{cases} \gamma_1 = -\omega^2 \cdot x_1 \\ \gamma_2 = -\omega^2 \cdot x_2 \\ \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

— Calculer les tenseurs des taux de déformations eulériens $\overline{\overline{D}}(\vec{x}, t)$ et des taux de rotation $\overline{\overline{\Omega}}(\vec{x}, t)$.

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{L}} + \overline{\overline{L}}^T)$$

Avec : $\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}}$ et $(\overline{\overline{\text{grad} \vec{V}}})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

$$\overline{\overline{L}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

— Le tenseurs des taux de déformations eulériens est :

$$\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{0}}$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{L}} - \overline{\overline{L}}^T)$$

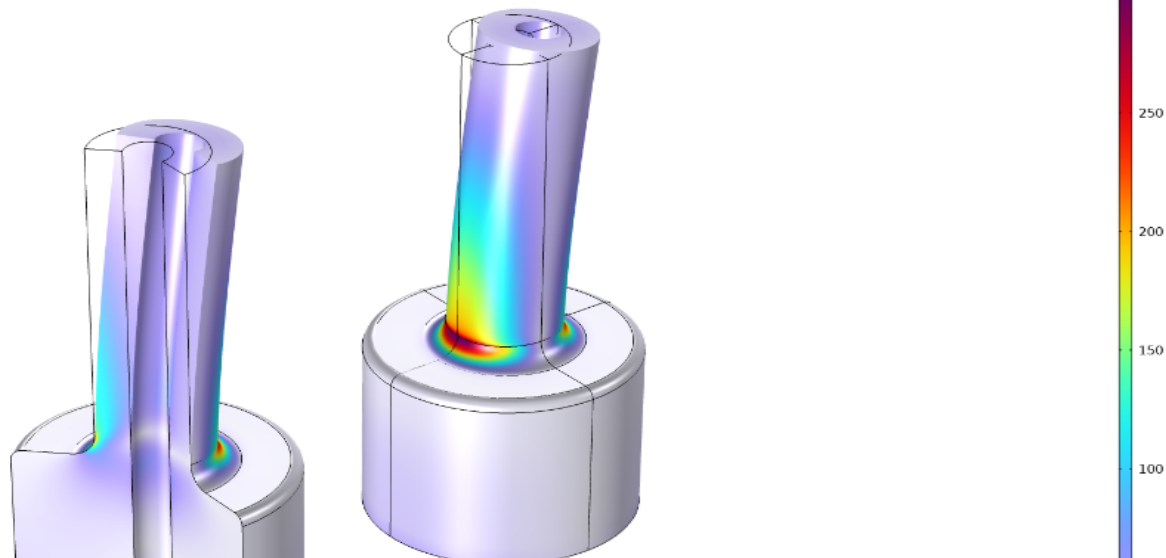
— Le tenseurs des taux de de rotations eulériens est :

$$\overline{\overline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



EFFORTS DANS LES MILIEUX CONTINUS

6	Conservation de la masse : équation de continuité	93
6.1	Introduction	
6.2	Le premier Cas	
6.3	Le second Cas	
7	Contraintes	97
7.1	Objectif	
7.2	Interactions - cadre Newtonien	
7.3	Champ de contrainte	
7.4	Propriétés des contraintes	
7.5	Diagonalisation du tenseur des contraintes	
7.6	Représentation graphique d'un état de contrainte	
7.7	Conditions aux limites du solide exprimées en contraintes	
7.8	Exercice	



6. Conservation de la masse : équation de continuité

6.1 Introduction

On procédera, dans ce chapitre, à une première application de la notion de dérivée particulaire. Il s'agit d'établir l'équation traduisant la conservation de la masse¹. Soit un milieu occupant à

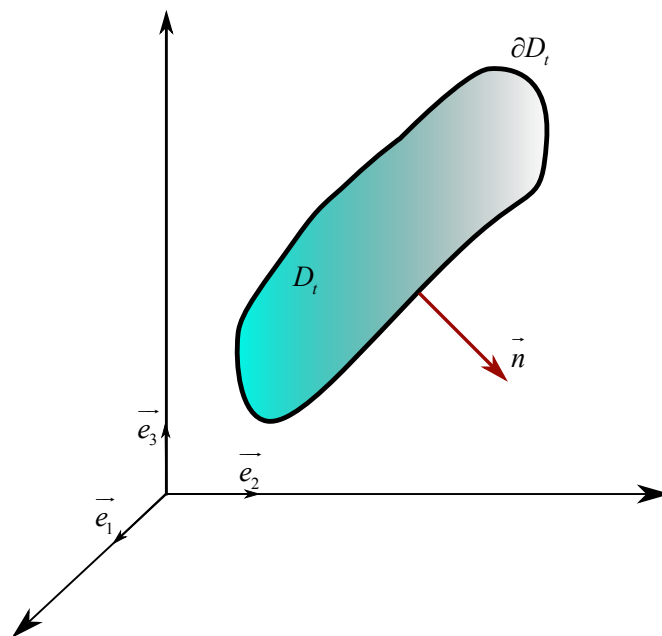


FIGURE 6.1 – Masse d'un milieu continu.

l'instant t un domaine D_t de bord ∂D_t , de vecteur normal \vec{n} et de volume γ_t , figure (9.3).

1. En Mécanique classique, la masse se conserve au cours du temps, ce qui n'est pas le cas en Mécanique relativiste.

On définit sa densité volumique, ou sa masse volumique, par $\rho(\vec{x}, t)$ vérifiant :

$$\rho(\vec{x}, 0) = \rho_0(\vec{X}) \quad (6.1)$$

La masse du volume γ_t est alors donnée par :

$$M(\vec{x}, t) = \int_{\gamma_t} \rho(\vec{x}, t) dv = \int_{\gamma_0} \rho(\vec{\phi}(\vec{X}, t), t) J dv_0 \quad (6.2)$$

Le principe de conservation de la masse implique que, pour **tout** système matériel, la dérivée particulaire de la masse est nulle :

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad (6.3)$$

6.2 Le premier Cas

ρ et \vec{V} sont continues et continûment différentiables

Conformément aux résultats du chapitre précédent, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \int_{\gamma_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial \gamma_t} \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} ds \\ &= \int_{\gamma_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\gamma_t} \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) \cdot dv \\ &= \int_{\gamma_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) \right] dv \end{aligned} \quad (6.4)$$

La conservation de la masse s'exprime alors par :

$$\forall \gamma_t, \int_{\gamma_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) \right] dv = 0$$

D'où l'équation locale de conservation de la masse :

$$\forall \vec{x} \in D_t, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

Or on a : $\text{div}(\rho \cdot \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) \cdot \vec{V} + \rho \text{div}(\vec{V})$, d'où, enfin l'équation de conservation de la masse, également appelée **équation de continuité** :

$$\forall \vec{x} \in D_t, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (6.5)$$

R Soit un volume élémentaire de masse dm . On note dv_0 son volume dans la configuration de référence et dv celui dans la configuration actuelle. La masse dm étant conservée, on peut écrire :

$$dm = \rho_0 dv_0 = \rho dv \Leftrightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{dv_0}{dv}$$

Or d'après l'équation (4.12), on a : $\frac{dv_0}{dv} = \frac{1}{J}$, d'où :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{J} \quad (6.6)$$

6.3 Le second Cas

ρ et \vec{V} sont continues et continûment différentiables par morceaux

Soit Σ_t de vecteur normal \vec{N} une surface géométrique au franchissement de laquelle ρ et/ou \vec{V} sont discontinues et, \vec{W} la vitesse de propagation de cette surface, figure La conservation de la masse

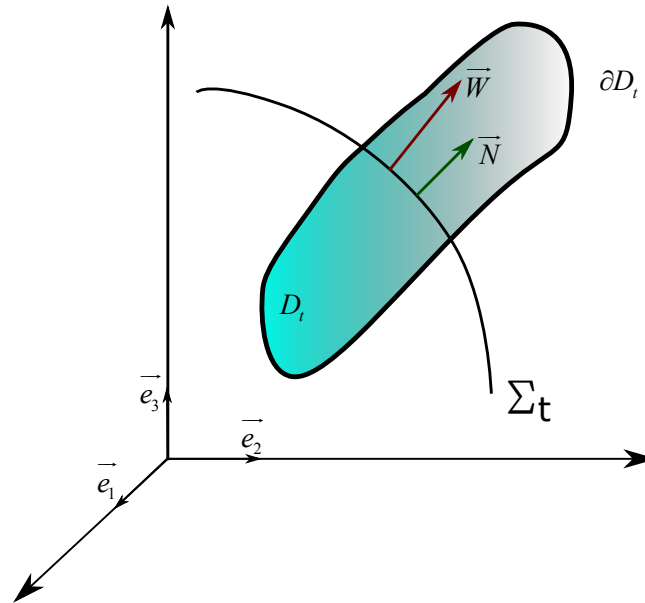


FIGURE 6.2 – Présence d'une discontinuité.

s'exprime alors à partir de l'équation (5.21) :

$$\forall \gamma_t, \forall \Sigma_t, \frac{dM}{dt} = \int_{\gamma_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{V}) \right] dv + \int_{\Sigma_t} \left[\rho (\vec{V} - \vec{W}) \right] \cdot \vec{N} d\Sigma \quad (6.7)$$

En exploitant le caractère arbitraire de γ_t et de Σ_t , on déduit les équations locales suivantes :

$$\forall \vec{x} \in D_t, \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (6.8)$$

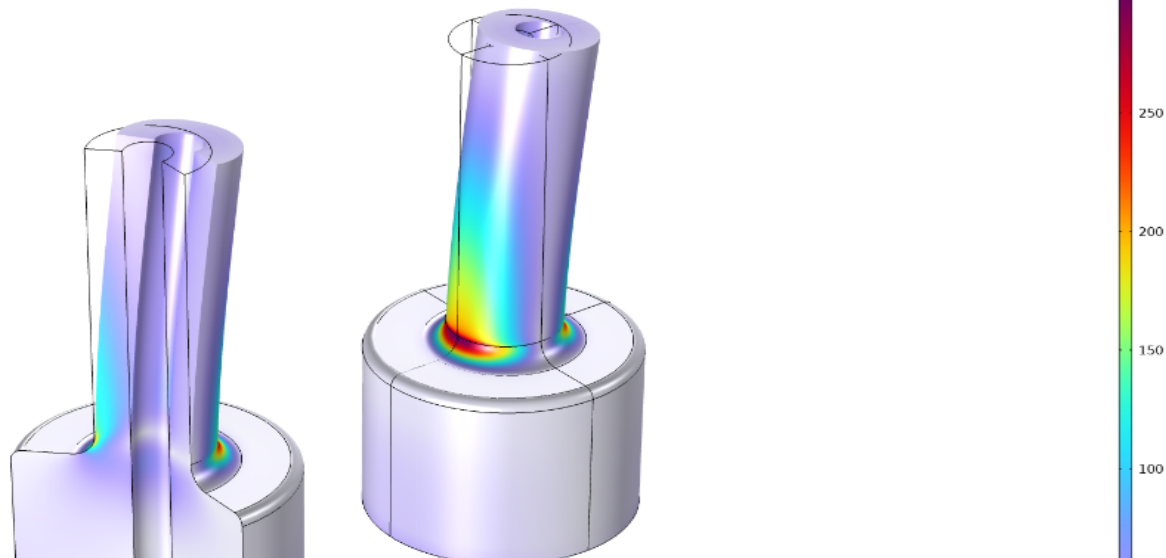
$$\forall \vec{x} \in \Sigma_t, \left[\rho (\vec{V} - \vec{W}) \right] \cdot \vec{N} = 0 \quad (6.9)$$

La quantité $\mu = \rho (\vec{V} - \vec{W}) \cdot \vec{N}$ est appelée débit massique surfacique à travers Σ_t . l'équation (6.9) s'écrit donc :

$$\forall \vec{x} \in \Sigma_t, [\mu] = 0 \quad (6.10)$$

qui signifie que le débit en masse de matière à travers la surface géométrique Σ_t se conserve : "ce qui rentre = ce qui sort ou, autrement dit, Σ_t ne mange pas de particules".

1. Si $\mu \neq 0 \Rightarrow$ la vitesse \vec{V} des particules est différente de celle de la surface de discontinuité. Σ_t ne porte pas les mêmes particules lors de son mouvement. Il s'agit d'une surface géométrique qui traverse la matière. On parle d'onde de choc.
2. Si $\mu = 0 \Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{N} = \vec{W} \cdot \vec{N}$ la vitesse normale des particules est égale à la vitesse normale de Σ_t . Il s'agit d'une surface particulaire ou matérielle. On parle alors de surface de contact. Par exemple, dans les composites l'interface entre les couches de matière représente une surface de contact.



7. Contraintes

7.1 Objectif

Dans ce chapitre on s'intéresse aux "forces internes" qui se développent dans un solide soumis à des actions extérieures. On évoquera comment ces forces se déclinent en "contraintes", comment les contraintes sont décrites par un tenseur, comment l'équilibre local est régi.

En fait la notion de force, même si elle semble intuitive de prime abord, pose un problème de définition. Une force n'est rien moins qu'un concept ayant un caractère vectoriel ; elle est souvent définie en référence à sa capacité d'accélérer une masse, concept newtonien s'il en est.

7.2 Interactions - cadre Newtonien

Bien que la théorie de la relativité (Einstein 1905) dénie l'unicité du temps en remettant en question la notion de simultanéité, le cours de MMC reprendra les hypothèses formulées par Isaac Newton (1642-1727) sur l'espace et le temps et qui prévalent en mécanique classique.

7.2.1 Espace

Newton fait l'hypothèse d'un espace dont la structure euclidienne est indépendante de la présence des corps matériels : "L'espace absolu, sans relation aux choses extérieures, demeure toujours similaire et immobile".

Les référentiels en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres sont dits galiléens. En pratique, on considère qu'un repère calé sur des étoiles "fixes" (lointaines) de la Galaxie constitue un repère galiléen.

Pour la plupart des applications, notamment en génie civil, on considérera qu'un référentiel lié à la Terre constitue une bonne approximation d'un système galiléen.

7.2.2 Temps

Newton fait l'hypothèse d'une chronologie absolue, commune à tous les sites de l'espace : *"le temps absolu vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément et s'appelle durée"*.

Pour lui toutes les horloges sont synchronisables quelque soit leur distance réciproque ou leur vitesse relative. De ce fait la simultanéité de deux évènements peut toujours être établie.

7.2.3 Origine des forces

Les forces entre solides (ou entre les différentes parties d'un même solide), résultent principalement de deux interactions entre les particules constitutives de ces solides parmi quatre types d'interactions connues (interaction forte, interaction électromagnétique, interaction faible et interaction gravitationnelle). Ces interactions sont véhiculées au niveau quantique par des particules appelées bosons d'interaction.

En mécanique classique, on ne considère que deux types d'interactions :

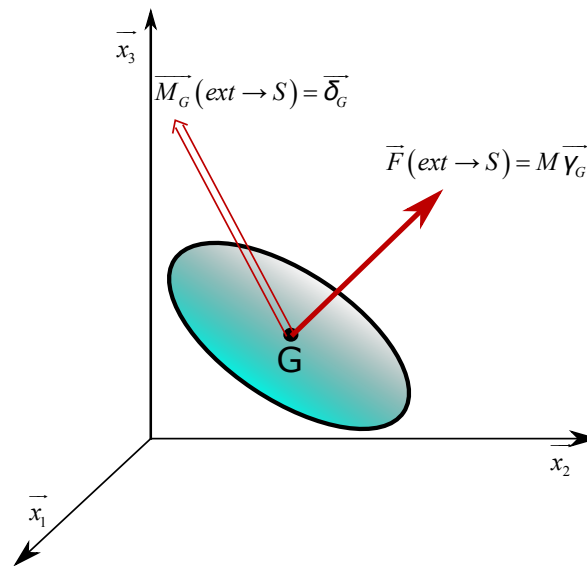


FIGURE 7.1 – Théorème fondamental.

1. les forces de contact : répulsives et d'origine électromagnétiques ;
2. les forces à distance : uniquement attractives et d'origine gravitationnelle

Les forces ont un caractère vectoriel. Plus précisément, un ensemble de forces peut être réduit, du point de vue mathématique, à un torseur.

7.2.4 Principe fondamental Dynamique

Le principe fondamental de la dynamique (ou de la statique en l'absence d'accélération) peut s'énoncer comme suit :

Dans tout repère galiléen, le torseur des actions extérieures $\{F_{ext \rightarrow S}\}$ agissant sur un solide (ou une portion de solide) est égal au torseur dynamique $\{D_{S/R_0}\}$ dudit solide (de ladite portion de solide). Par exemple, en réduisant les torseurs au centre de gravité :

$$\{F_{ext \rightarrow S}\}_G = \{D_{S/R_0}\}_G \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}(ext \rightarrow S) = \int_S \rho \vec{\gamma} dv = M \vec{\gamma}_G \\ \vec{M}_G(ext \rightarrow S) = \int_S \vec{GM} \wedge \rho \vec{\gamma} dv = \vec{\delta}_G \end{cases} \quad (7.1)$$

Équations dans lesquelles ρ désigne la masse volumique, $\vec{\gamma}$ le champ d'accélération galiléenne, dv un élément de volume, M la masse totale du solide, $\vec{\delta}_G$ le moment dynamique calculé au centre de gravité G .

Statique

En l'absence d'accélération (repos) les équations se simplifient car le torseur des forces extérieures agissant sur un solide (une portion de solide) est égal au torseur nul :

$$\boxed{\{F_{ext \rightarrow S}\}_G = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}(ext \rightarrow S) = \vec{0} \\ M_G(ext \rightarrow S) = \vec{0} \end{cases}} \quad (7.2)$$

7.2.5 Action-réaction

Il sera utile de s'intéresser à l'action d'un solide S_1 sur un autre solide S_2 et, réciproquement, à l'action du solide S_2 sur le premier solide S_1 .

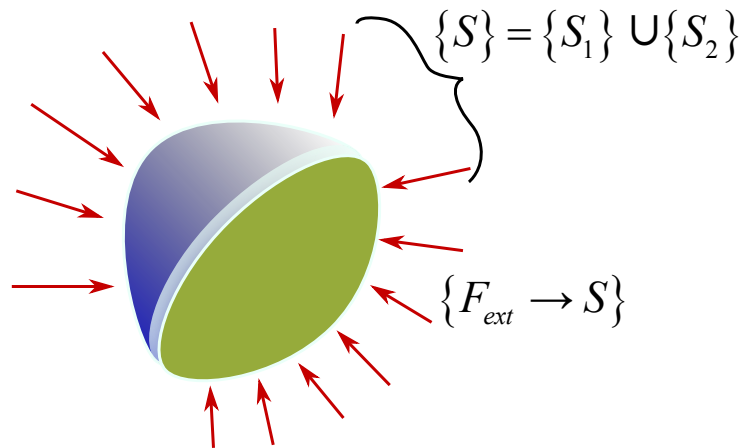


FIGURE 7.2 – solide considéré comme l'union de ses deux parties.

- On note $\{F_{ext \rightarrow S}\}$ le torseur des forces agissant sur le solide (S) formé par l'union des parties (S_1) et (S_2). Ces forces agissent de façon volumique (par exemple le poids) ou au contact de (S) à travers sa surface. D'après le théorème fondamental de la dynamique :

$$\boxed{\{F_{ext \rightarrow S}\} = \{D_{S/R_0}\}} \quad (7.3)$$

- Après séparation des deux parties, on s'intéresse à la partie (S_1) et on observe l'action qu'exerce la partie (S_2) sur (S_1) réduite à son torseur $\{S_2 \rightarrow S_1\}$, alors :

$$\boxed{\{F_{ext \rightarrow S_1}\} + \{S_2 \rightarrow S_1\} = \{D_{S_1/R_0}\}} \quad (7.4)$$

- On s'intéresse aussi à la partie (S_2) et on observe l'action qu'exerce la partie (S_1) sur (S_2) réduite à son torseur $\{S_1 \rightarrow S_2\}$, alors :

$$\boxed{\{F_{ext \rightarrow S_2}\} + \{S_1 \rightarrow S_2\} = \{D_{S_2/R_0}\}} \quad (7.5)$$

Sommons (7.4) et (7.5), il vient :

$$\boxed{[\{F_{ext \rightarrow S_1}\} + \{F_{ext \rightarrow S_2}\}] + \{S_2 \rightarrow S_1\} + \{S_1 \rightarrow S_2\} = [\{D_{S_1/R_0}\} + \{D_{S_2/R_0}\}]} \quad (7.6)$$

En regroupant les termes situés dans les crochets :

$$\{F_{ext \rightarrow S}\} + \{S_2 \rightarrow S_1\} + \{S_1 \rightarrow S_2\} = \{D_{S/R_0}\}$$

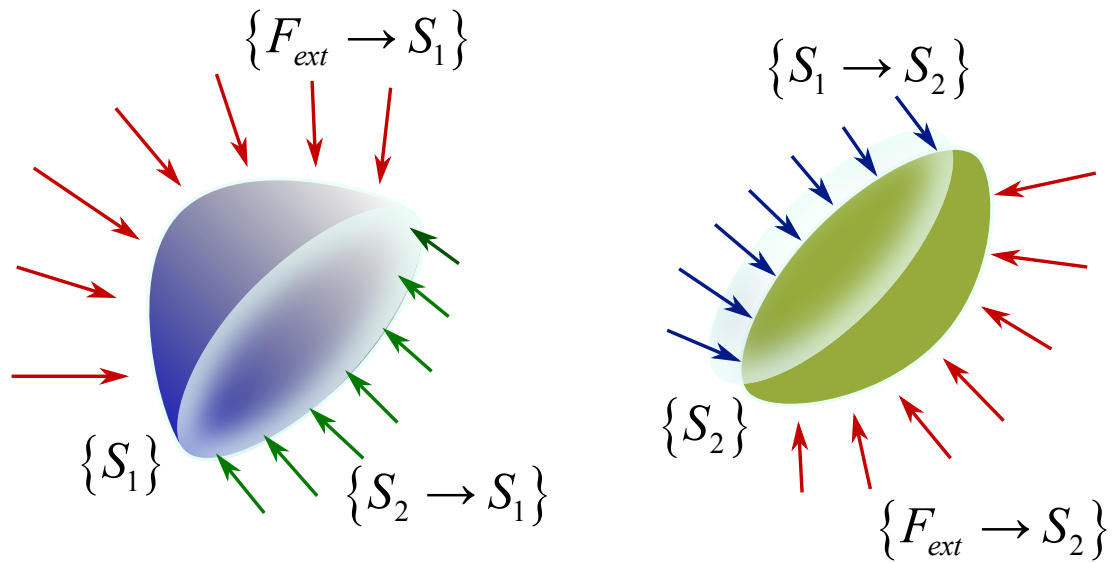


FIGURE 7.3 – Solide décomposé en deux parties.

Et compte tenu de (7.3) :

$$\{S_2 \rightarrow S_1\} = -\{S_1 \rightarrow S_2\}$$

Le principe d'action-réaction s'énonce ainsi : Le torseur des actions qu'exerce le solide (S_2) sur le solide (S_1) est égal à l'opposé du torseur des actions qu'exerce le solide (S_1) sur le solide (S_2).

Ce principe s'étend au niveau local : en tout point situé à l'interface des deux parties, la force surfacique qu'exerce le solide S_1 sur le solide S_2 est opposée à la force surfacique qu'exerce le solide S_2 sur le solide S_1 .

7.3 Champ de contrainte

7.3.1 Partitionnement d'un solide

Soit un solide (S) (figure) soumis à des efforts extérieurs (en régime dynamique ou statique, peu importe).

Le solide (S) est partitionné par un plan arbitraire (figure 7.4). Faisant abstraction de la partie (S_2),

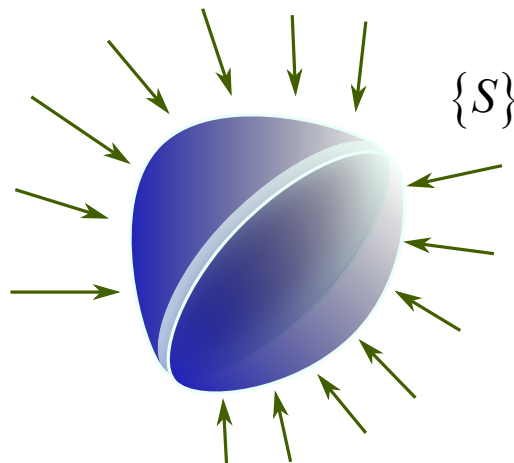


FIGURE 7.4 – Solide soumis à des forces.

la portion (S_1) est soumise à :

- une partie des efforts extérieurs (poids volumique + forces appliquées sur la frontière de (S) commune à (S_1))
- l'ensemble des efforts qu'exerce (S_2) (la partie "manquante") sur (S_1) à travers la surface de contact (Ω) et qui traduisent la cohésion des deux portions de solide dans la configuration où (S) est entier .

7.3.2 Hypothèse sur la nature des forces internes

L'action de (S_2) sur (S_1) est modélisée par une distribution de torseurs agissant en chaque point de la surface de scission :

- Ces torseurs ont une résultante homogène à une force par unité de surface et un moment homogène à un couple par unité de surface. La répartition de moments est uniquement prise en compte dans la théorie de la magnétodynamique décrivant les effets à distance provoqués par un champ magnétique (ce qui ne sera pas abordé ici).
- Ces torseurs (réduits à des glisseurs donc) dépendent du point M auxquels ils sont appliqués ;
- Ces torseurs dépendent également de l'orientation locale de la surface (caractérisée par le vecteur normal unitaire extérieur à (S_1) et noté \vec{n} comme le montre la figure 7.5) ;

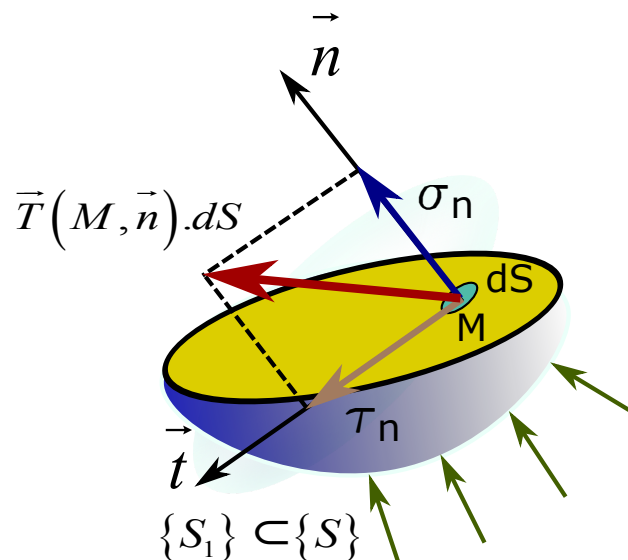


FIGURE 7.5 – Section du solide.

Postulat de Cauchy : ces torseurs ont un caractère local (ils ne dépendent que de M et de \vec{n} et non pas de la forme ou du volume de (S_1)). Pour les situations courantes, la distribution de moments surfaciques est ignorée. Nous ferons donc l'hypothèse suivante :

- Les forces internes de contact qu'exerce (S_2) sur (S_1) à travers la surface commune sont modélisées uniquement par une distribution de forces surfaciques (ou force par unité de surface) dépendant du point M de ladite surface et de l'orientation \vec{n} locale. Dimension des forces surfaciques de contact $[F.L^{-2}]$, unité *SI* : Pascal ($1Pa = 1N/m^2$), unité courante : le Méga-Pascal ($1MPa = 10^6Pa$).
- Sur un plan formel, mathématique, il existe donc une transformation, notée provisoirement $\tilde{\sigma}$, qui à chaque paire formée d'un point et d'un vecteur unitaire associe un vecteur contrainte :

$$\tilde{\sigma} : (M, \vec{n}) \rightarrow \vec{T}(M, \vec{n})$$

7.3.3 Contrainte normale et contrainte de cisaillement

Comme le montre la figure 7.5, le vecteur contrainte $\overrightarrow{T(M, \vec{n})}$ peut être projeté sur le vecteur directeur orientant la facette elle-même ainsi que sur le plan tangent à la facette. On peut ainsi poser :

$$\overrightarrow{T(M, \vec{n})} = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$$

- Le vecteur \vec{n} est parfaitement défini et la composante σ_n est appelée "composante normale de contrainte" ou, plus simplement "contrainte normale"; il s'agit d'une composante scalaire algébrique. Si elle est positive c'est qu'elle exerce un effet de traction localement à la surface du solide; si, au contraire, elle est négative, c'est qu'elle traduit une compression locale.
- Le vecteur $\tau_n \vec{t}$ est défini par différence $\tau_n \vec{t} = \overrightarrow{T(M, \vec{n})} - \sigma_n \vec{n}$. Le vecteur \vec{t} est ainsi défini au sens près selon le signe qui est attribué par la composante τ_n . La composante τ_n a de multiples dénominations équivalentes; elle est ainsi appelée "contrainte tangente" ou "contrainte de cisaillement" ou "contrainte de cission".

7.4 Propriétés des contraintes

Dans ce paragraphe, le caractère tensoriel du champ de contrainte est démontré; l'équilibre local est énoncé.

7.4.1 Tenseur des contraintes

On considère un petit tétraèdre inscrit dans un solide (S) et centré sur un point M . Trois des facettes parmi quatre sont construites parallèlement aux plans du repère orthogonal $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (figure 7.6). La facette 1, par exemple, possède une surface dS_1 et est orientée par le vecteur $-\vec{e}_1$. Si on nomme $\vec{\Phi}_1 = \overrightarrow{T(M, \vec{e}_1)}$ le vecteur contrainte agissant sur la facette orientée par le vecteur $+\vec{e}_1$, du fait du principe d'action et réaction, le vecteur contrainte qui agit sur la facette 1 lui est opposé et vaut donc $-\vec{\Phi}_1$. Il en va de même des autres faces orthogonales (notées 2 et 3).

La projection du vecteur $\vec{\Phi}_k$ $k = 1..3$ sur les vecteurs unitaires du repère permet d'en introduire les composantes $\vec{\Phi}_k = \sigma_{k1}\vec{e}_1 + \sigma_{k2}\vec{e}_2 + \sigma_{k3}\vec{e}_3$. Les composantes σ_{kj} se voient ainsi attribuer un double indice : le 1er indice k faisant référence à celui du vecteur unitaire directeur de la facette et le second indice j à l'axe de projection, $k, j = 1..3$.

L'équilibre (statique ou dynamique) du domaine tétraédrique est simplement établi grâce à un bilan de forces résumé dans le tableau ci-dessous.

Avec $dS_1 = dS.n_1, dS_2 = dS.n_2, dS_3 = dS.n_3$ (par projection) et $dV = \frac{1}{6}dx_1dx_2dx_3$

face	vecteur directeur	aire	vecteur contrainte
1	$-\vec{e}_1$	$dS_1 = \frac{1}{2}dx_2dx_3$	$-\vec{\Phi}_1 = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3$
2	$-\vec{e}_2$	$dS_2 = \frac{1}{2}dx_3dx_1$	$-\vec{\Phi}_2 = \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3$
3	$-\vec{e}_3$	$dS_3 = \frac{1}{2}dx_1dx_2$	$-\vec{\Phi}_3 = \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3$
4	$\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$	dS	$\overrightarrow{T(M, \vec{n})} = T_1\vec{e}_1 + T_2\vec{e}_2 + T_3\vec{e}_3$
		volume	vecteur volumique
poids volumique	-	dV	$\rho \vec{g}$
force d'inertie		dV	$\rho \vec{\gamma}$

TABLE 7.1 – Bilan des forces

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au tétraèdre permet ainsi d'écrire :

$$\vec{T} dS - \vec{\phi}_1 dS_1 - \vec{\phi}_2 dS_2 - \vec{\phi}_3 dS_3 + \rho \vec{g} dV = \rho \vec{\gamma} dV$$

Soit :

$$\left(\vec{T} - \vec{\phi}_1 n_1 - \vec{\phi}_2 n_2 - \vec{\phi}_3 n_3 \right) dS + \rho \vec{g} dV = \rho \vec{\gamma} dV$$

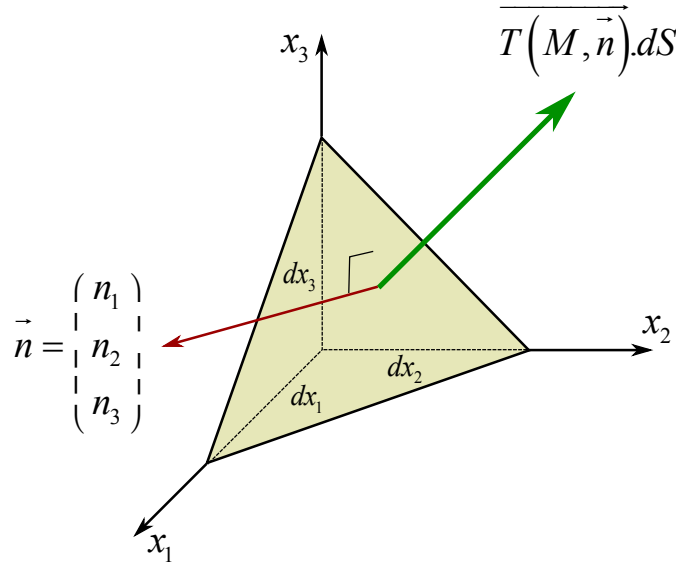


FIGURE 7.6 – élément de volume tétraédrique.

Lorsque les cotés du tétraèdre tendent vers zéro, les termes de volume, d'ordre supérieur, deviennent négligeables devant le terme de surface, de sorte que :

$$\vec{T} - \vec{\phi}_1 n_1 - \vec{\phi}_2 n_2 - \vec{\phi}_3 n_3 \simeq \vec{0}$$

Et ainsi :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

On vient donc de démontrer que l'opérateur $\vec{\sigma} : (M, \vec{n}) \rightarrow \vec{T}(M, \vec{n})$ est linéaire, d'ordre 2. C'est un tenseur dont les composantes viennent d'être déterminées. On note :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma(M)}} \cdot \vec{n} \quad (7.7)$$

Le champ tensorielle $\overline{\overline{\sigma(M)}}$, fonction du point M , est appelé champ de contrainte.

7.4.2 Équilibre dynamique d'un domaine solide

La répartition des contraintes au sein du solide (S) dépend des efforts qui s'exercent à sa surface (∂S) et des efforts volumiques agissant sur chacune de ses parties. La démonstration qui suit vise à établir les conditions de **l'équilibre local**.

R Dans la littérature, on trouve souvent une méthode consistant à isoler un petit parallépipède rectangle et conduisant à la même solution bien qu'en particulierisant le développement des calculs aux coordonnées cartésiennes.

Considérons un sous-domaine D quelconque extrait du solide (S) et suivons-le dans son mouvement (description de Lagrange)

Le solide, globalement, est soumis à des actions extérieures appliquées à sa surface (∂S) et des actions volumiques dans le volume $\{S\}$; sous ces actions, il est le siège de déplacements, de déformations et de contraintes éventuellement variables dans le temps.

Tout volume $\{D\}$ extrait de $\{S\}$ est soumis aux forces volumiques ainsi qu'aux forces de surface qui s'expriment à sa surface (∂D); ces dernières forces surfaciques ne sont autres que les vecteurs contrainte agissant en chaque point P de l'enveloppe localement orientée par le vecteur \vec{n} normal extérieur à $\{D\}$.

Résultante dynamique : Équation de l'équilibre local

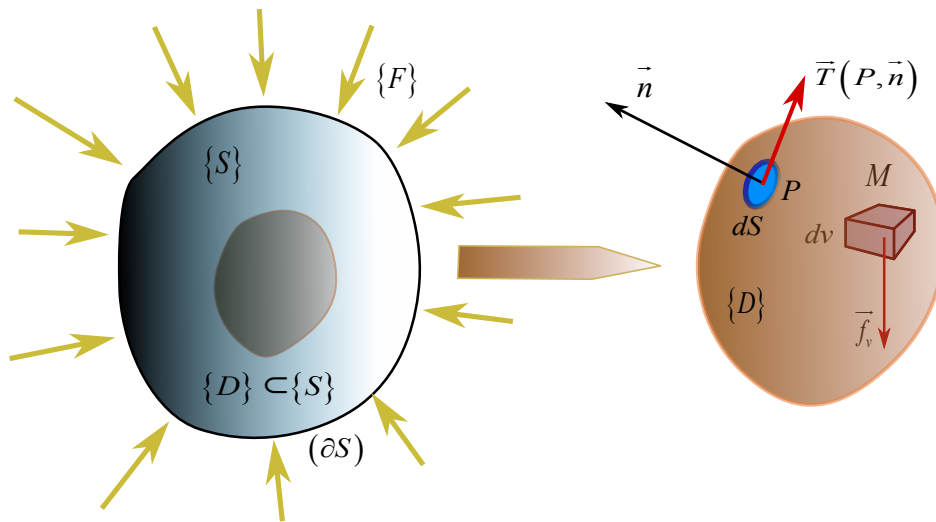


FIGURE 7.7 – sous-domaine extrait d'un solide.

L'équation fondamentale de la dynamique (7.1) dans un repère galiléen R_0 , en résultante, s'écrit :

$$\iiint_D \vec{f}_v(M) dv + \oint_{\partial D} \overline{T(P, \vec{n})} \cdot d\vec{S} = \iiint_D \rho \vec{\gamma}(M) dv$$

ou, compte tenu de la relation 7.7 et en adoptant une notation simplifiée pour les intégrales :

$$\int_D \vec{f}_v(M) dv + \oint_{\partial D} \overline{\vec{\sigma}(P)} \cdot d\vec{S} = \int_D \rho \vec{\gamma}(M) dv$$

Le théorème de la divergence (ou théorème du flux-divergence) permet de transformer l'intégrale de surface (sur l'enveloppe fermée) en intégrale de volume :

$$\int_D \vec{f}_v(M) dv + \int_D \overline{div}(\vec{\sigma}) \cdot dv = \int_D \rho \vec{\gamma}(M) dv$$

et ce, quelque soit $\{D\} \subset \{S\}$, c'est donc que :

$$\boxed{\overline{div}(\vec{\sigma}) + \vec{f}_v = \rho \vec{\gamma}} \quad (7.8)$$

Cette équation exprime l'équilibre local (au sens dynamique du terme) de toute particule incluse dans le solide. En statique, et si l'on convient que la force de volume n'est autre que le poids

volumique, il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{div}}(\overline{\overline{\sigma}}) + \overrightarrow{f}_v = \overrightarrow{0}} \quad (7.9)$$

Moment dynamique : symétrie du tenseur des contraintes

L'équation fondamentale de la dynamique (7.1) dans un repère galiléen R_0 , en moment par rapport au centre O du repère, s'écrit :

$$\int_D \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f}_v(M) dv + \oint_{\partial D} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{T}(P, \overrightarrow{n}) \cdot dS = \int_D \overrightarrow{OM} \wedge \rho \overrightarrow{\gamma}(M) dv$$

Prenant en compte l'équation 7.8, on transforme le second membre :

$$\int_D \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f}_v(M) dv + \oint_{\partial D} \overrightarrow{OP} \wedge \overline{\overline{\sigma}} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_D \overrightarrow{OM} \wedge (\overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} + \overrightarrow{f}_v) dv$$

Il reste :

$$\oint_{\partial D} \overrightarrow{OP} \wedge \overline{\overline{\sigma}} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_D \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} dv$$

Intéressons nous à la composante selon le vecteur unitaire \overrightarrow{e}_1 :

$$\oint_{\partial D} (\overrightarrow{OP} \wedge \overline{\overline{\sigma}} \cdot \overrightarrow{n}) \cdot \overrightarrow{e}_1 dS = \int_D (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}}) \cdot \overrightarrow{e}_1 dv$$

Se réduit à :

$$\oint_{\partial D} (x_3 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) \cdot n_j dS = \int_D (x_2 \sigma_{3j,j} - x_3 \sigma_{2j,j}) dv$$

Appliquons le théorème de flux-divergence sur le premier membre, alors :

$$\int_D \frac{\partial}{\partial x_j} (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) dv = \int_D \left(x_2 \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} \right) dv \quad \forall D$$

En développant le premier terme :

$$\begin{aligned} \delta_{2j} \sigma_{3j} + x_2 \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} - \delta_{3j} \sigma_{2j} - x_3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} &= x_2 \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} \\ \Rightarrow \delta_{2j} \sigma_{3j} - \delta_{3j} \sigma_{2j} &= 0 \end{aligned}$$

Et, puisque $\delta_{aj} F_{bj} = F_{ab}$, il vient :

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = 0$$

Et, de façon générale :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Le tenseur des contraintes est donc symétrique.

$$\boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}^T} \quad (7.10)$$

interprétation Si on considère un dièdre droit et en particulier un dièdre dont les faces orientées par les vecteurs \overrightarrow{e}_i et \overrightarrow{e}_j , la composante de contrainte σ_{ji} agit sur la facette orientée par \overrightarrow{e}_i dans la direction \overrightarrow{e}_j alors que σ_{ji} agit sur la facette orientée par \overrightarrow{e}_j dans la direction \overrightarrow{e}_i . Ces deux composantes sont égales (par exemple les composantes σ_{23} et σ_{32} de la figure 7.8, ce qui traduit la réciprocité des contraintes. Cette réciprocité garantit l'équilibre, en moment, de toutes les particules du solide.

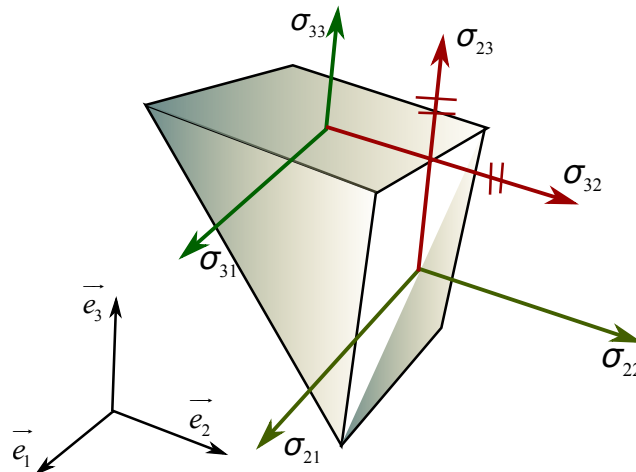


FIGURE 7.8 – réciprocité des contraintes de cisaillement.

7.5 Diagonalisation du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes est symétrique. Il existe une base orthonormée dans laquelle sa matrice est diagonale et les valeurs propres qui composent sa diagonale sont réelles.

7.5.1 Contraintes principales

Les contraintes principales sont les valeurs propres du tenseur des contraintes (figure 7.9). Elles sont donc solutions de l'équation caractéristique : $\det(\overline{\overline{\sigma}} - \lambda \overline{\overline{I}}) = 0$. On note $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$, les contraintes principales traditionnellement ainsi classées de la plus grande à la plus petite.

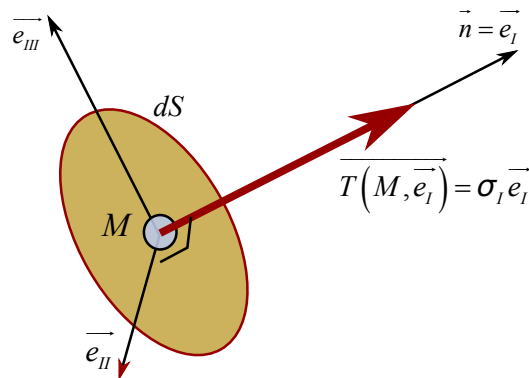


FIGURE 7.9 – contrainte principale et direction principale de contrainte.

7.5.2 Directions principales de contrainte

Les directions principales de contraintes sont les vecteurs propres formant la base $\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}$ orthonormée et respectivement associées aux contraintes principales $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$. Ainsi \vec{e}_J est solution de l'équation $(\overline{\overline{\sigma}} - \sigma_J \overline{\overline{I}}) \cdot \vec{e}_J = \vec{0}$ ($J = I, II, III$). Cette équation linéaire homogène admet une famille vectorielle comme solution. On choisit de retenir des vecteurs unitaires formant une base orthonormée directe.

Le tenseur des contraintes, dans la base des directions principales s'écrit donc :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}\}} \quad (7.11)$$

Propriété : Sur une facette orientée par un vecteur directeur principal, il n'y a pas de cisaillement.

7.5.3 Invariants du tenseur des contraintes

L'équation caractéristique se développe en :

$$\det |\overline{\overline{\sigma}} - \lambda \overline{\overline{I}}| = \lambda^3 + L_1 \lambda^2 + L_2 \lambda + L_3$$

Equation dans laquelle les coefficients sont indépendants de la base de projection de la matrice $\overline{\overline{\sigma}}$: ce sont les invariants du tenseur des contraintes. Leur valeur est donnée ci-dessous :

$$\begin{cases} L_1 = tr(\overline{\overline{\sigma}}) \\ L_2 = \frac{1}{2} (tr^2(\overline{\overline{\sigma}}) - tr(\overline{\overline{\sigma}^2})) \\ L_3 = \det |\overline{\overline{\sigma}}| \end{cases} \quad (7.12)$$

Valeurs que l'on peut déterminer soit dans une base quelconque $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\begin{cases} L_1 = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ L_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ij}) \\ L_3 = \det |\overline{\overline{\sigma}}| \end{cases}$$

Soit dans la base des directions principales $\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}$

$$\begin{cases} L_1 = \sigma_{KK} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ L_2 = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I \\ L_3 = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \end{cases}$$

7.5.4 Composantes sphérique et déviatorique d'un tenseur contraint

Définition

Il est probable que l'immersion d'un lopin métallique dans des profondeurs abyssales ne modifie pas considérablement sa microstructure, cette dernière étant déjà compacte à l'état naturel. De ce fait le métal en question est peu sensible à la pression. Si l'on cherche à établir les conditions dans lesquelles le lopin métallique sera affecté de manière irréversible par un état de contrainte, il convient alors de ne pas tenir compte de la part de contrainte assimilable à une pression.

C'est la raison pour laquelle les mécaniciens décomposent le tenseur des contraintes en deux termes :

1. un terme tensoriel sphérique $\overline{\overline{\sigma_S}}$ apportant la totalité de la pression hydrostatique ;
2. un terme tensoriel déviatorique $\overline{\overline{\sigma_D}}$ apportant le complément de contrainte. Comme la pression est toute entière contenue dans la trace du tenseur contraint. Le tenseur déviateur a une trace nulle.

Ainsi on établit les relations suivantes :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma_S}} + \overline{\overline{\sigma_D}} \quad tr(\overline{\overline{\sigma_D}}) = 0 \quad tr(\overline{\overline{\sigma_S}}) = tr(\overline{\overline{\sigma}}) = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad \overline{\overline{\sigma_S}} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \overline{\overline{I}} \quad \overline{\overline{\sigma_D}} = \overline{\overline{\sigma}} - \frac{1}{3} tr(\overline{\overline{\sigma}}) \overline{\overline{I}}$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \frac{1}{3}(2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11}) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \frac{1}{3}(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}) \end{pmatrix}}_{\overline{\overline{\sigma_D}}} + \underbrace{\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}_{\overline{\overline{\sigma_S}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déviateur a les mêmes directions principales que le tenseur des contraintes.

Invariants du tenseur déviateur

Les mécaniciens établissent des critères, portant par exemple sur le tenseur des contraintes mais pas seulement, qui établissent les conditions de l'apparition de déformations irréversibles dans les matériaux (par plasticité ou endommagement). Naturellement ces critères s'expriment indépendamment du choix de la base de projection des grandeurs tensorielles et s'appuient donc sur leurs invariants.

On est donc amené à considérer les invariants du tenseur déviateur :

$$\begin{cases} J_1 = tr(\overline{\overline{\sigma_D}}) = 0 \text{ par définition} \\ J_2 = \frac{1}{2} \left(tr(\overline{\overline{\sigma_D}^2}) \right) \\ J_3 = \det|\overline{\overline{\sigma_D}}| \end{cases}$$

Pour expliciter davantage ces termes, on peut diagonaliser le déviateur, et ce dans la même base de directions principales que le tenseur des contraintes, en :

$$\overline{\overline{\sigma_D}} = \begin{pmatrix} s_I & 0 & 0 \\ 0 & s_{II} & 0 \\ 0 & 0 & s_{III} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}\}}$$

Alors :

$$\begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = s_I s_{II} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I = \frac{1}{6} \left[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \right] \\ J_3 = s_I s_{II} s_{III} \end{cases} \quad (7.13)$$

7.6 Représentation graphique d'un état de contrainte

7.6.1 Tricercle de MOHR

Dans la base des directions principales de contraintes, la matrice représentative du tenseur des contraintes en un point M du solide (S) est donnée par l'équation 7.11. Considérons la facette centrée en M et orientée par le vecteur \vec{n} de composantes n_1, n_2, n_3 dans la base des vecteurs propres $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}\}$, alors (équation 7.7), le vecteur contrainte agissant en M sur ladite facette vaut :

$$\overline{T(M, \vec{n})} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I n_1 \\ \sigma_{II} n_2 \\ \sigma_{III} n_3 \end{pmatrix}$$

Avec : $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

On peut calculer les composantes normale et tangentielle de ce vecteur projetées respectivement sur la normale à la facette et dans son plan.

$$\overline{T(M, \vec{n})} = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$$

De plus, puisque nous avons le choix, convenons de prendre τ_n positif, le sens de \vec{t} découlant de

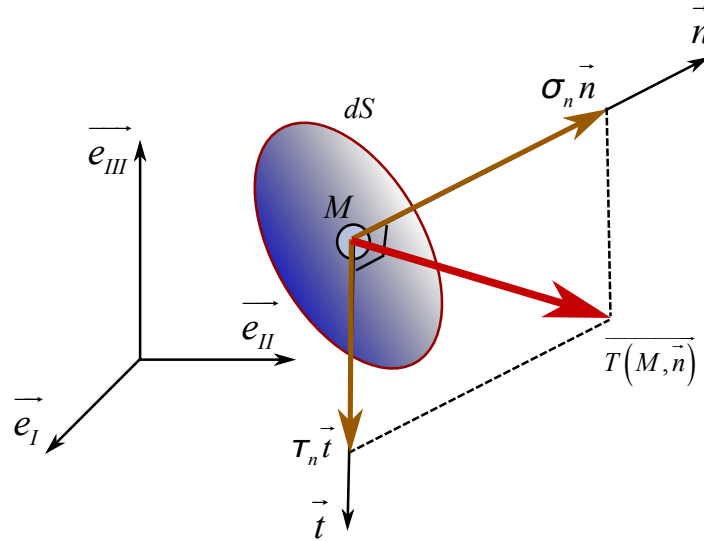


FIGURE 7.10 – contrainte normale et contrainte de cisaillement.

ce choix. Alors :

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{T} \cdot \vec{n} = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \\ \tau_n = \left\| \vec{T} - \sigma_n \vec{n} \right\| = \sqrt{T^2 - \sigma_n^2} \end{cases}$$

En fin de compte, on réunit le jeu d'équations et d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 \\ \sigma_n = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \\ \sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \end{cases}$$

Les équations permettent de générer les relations suivantes :

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III})}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})} \\ n_2^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_{III})(\sigma_n - \sigma_I)}{(\sigma_{II} - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_I)} \\ n_3^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II})}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})} \\ \sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} \end{cases} \quad (7.14)$$

Compte tenu des inéquations, d'une part, du fait que $n_j^2 \geq 0$ d'autre part, on déduit les inéquations :

$$\begin{cases} \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III}) \geq 0 \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_{III})(\sigma_n - \sigma_I) \geq 0 \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II}) \geq 0 \end{cases} \quad (7.15)$$

Si, à tout vecteur contrainte \vec{T} on fait correspondre un point image Φ dans le plan $\{\sigma, \tau\}$ (plan de MOHR), les inéquations précédentes montrent que le point $\Phi(\sigma_n, \tau_n)$ est inclus dans l'espace géométrique délimité par trois cercles : c'est le "tricerclé de MOHR".

7.6.2 Cercle de MOHR

Un cas particulier de l'état de contrainte

Si, localement, la facette (dS) est tangente à l'un des trois plans principaux (contenant deux axes principaux), par exemple (dS_{III}) tangente au plan $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}$ alors le vecteur contrainte agissant sur cette facette est réduite à la composante σ_{III} . C'est le cas, notamment, lorsque la facette considérée est prise à la surface d'un solide.

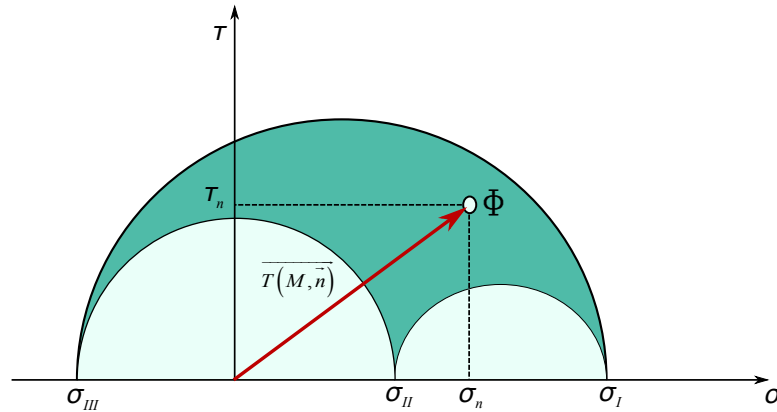


FIGURE 7.11 – tricerclé de MOHR (pour les contraintes).

Considérons maintenant une facette quelconque (dS) perpendiculaire à (dS_{III}), donc contenant \vec{e}_{III} (c'est donc que $\vec{n} \perp \vec{e}_{III}$ et donc $n_3 = 0$).

A noter que, du fait de la réciprocité des cisaillements, la composante de cisssion $\vec{\tau}_n$ est contenue dans le plan $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}$.

Compte tenu de ce que $n_3 = 0$, la troisième équation de la liste 7.14 se réduit ainsi à :

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II}) = 0$$

Que l'on transforme en :

$$\left(\sigma_n - \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right) \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2$$

Dans le plan de MOHR le point figuratif Φ du vecteur contrainte se situe sur le cercle de centre de coordonnées $\left\{ \sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II}); 0 \right\}$ et de rayon $R = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$. On dit que l'état de contrainte est localement plan; ce cercle est le cercle de MOHR des contraintes (planes); le paragraphe suivant en précise les modalités de construction.

Construction

La construction du cercle de MOHR des contraintes concerne un état de contrainte localement plan. L'état de contrainte est ainsi caractérisé par un tenseur des contraintes réduit à :

$$\boxed{\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}\}}} \quad (7.16)$$

Conventionnellement, on le réduit en 2D à la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_{II} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}} \quad (7.17)$$

L'objet du cercle de MOHR (figure 7.12) est de permettre la détermination graphique (quantitative

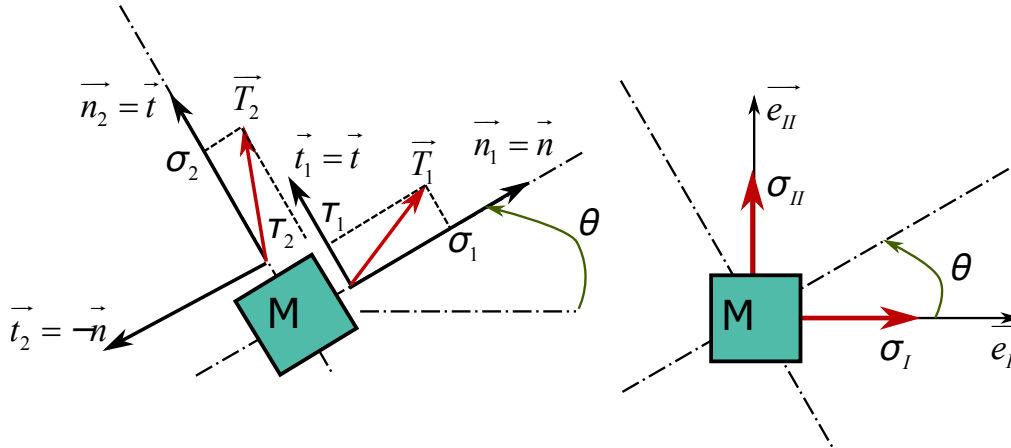


FIGURE 7.12 – état plan de contrainte (cas du plan perpendiculaire à l'axe III).

et rapide.) des vecteurs contraintes agissant sur des facettes contenant le vecteur \vec{e}_{III} ; le vecteur directeur d'une telle facette exclut donc \vec{e}_{III} et, par conséquent, $\vec{n} = n_1 \vec{e}_I + n_2 \vec{e}_{II}$.

n_1, n_2 sont les cosinus directeurs du vecteur \vec{n} dans la base \vec{e}_I, \vec{e}_{II} . On introduit ainsi : $\vec{n} = \cos \theta \vec{e}_I + \sin \theta \vec{e}_{II}$ ou θ est l'angle que fait le vecteur \vec{n} avec l'axe \vec{e}_I : $\theta = \widehat{\vec{e}_I, \vec{n}}$. Pour alléger encore l'écriture on pose $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$.

Le vecteur contrainte agissant sur ladite facette est donc : $\vec{T}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_I c \\ \sigma_{II} s \end{pmatrix}$ dans la base $\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}\}$.

On décompose ce vecteur selon la normale $\vec{n} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ et le vecteur tangent $\vec{t} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$ obtenu par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ de \vec{n} autour de \vec{e}_{III} . Alors :

$$\vec{T}_1 = \sigma_1 \vec{n} + \tau_1 \vec{t} \quad \text{avec} \quad \sigma_1 = \sigma_I c^2 + \sigma_{II} s^2 \quad \text{et} \quad \tau_1 = -cs(\sigma_I - \sigma_{II})$$

Par commodité, on introduit l'angle double 2θ de sorte que :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right) \cos 2\theta \\ \tau_1 &= - \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right) \sin 2\theta \end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \underbrace{\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right)}_{\sigma_0} + \underbrace{\left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)}_R \cos(2\theta) \\ \tau_1 &= - \underbrace{\left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)}_R \sin(2\theta) \end{aligned}$$

NOTE 1 : Dans le plan $\{\sigma, \tau\}$, le point figuratif du vecteur contrainte \vec{T}_1 est situé sur un cercle centré en $\Phi_0(\sigma_0, 0)$ et de rayon R , avec $\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II})$ et $R = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$.

NOTE 2 : Si la normale à la facette fait un angle θ avec la direction principale \vec{e}_I , alors le rayon $[\Phi_0 \Phi]$ fait un angle -2θ avec l'axe $O\sigma$ (prendre attention au changement de sens de rotation).

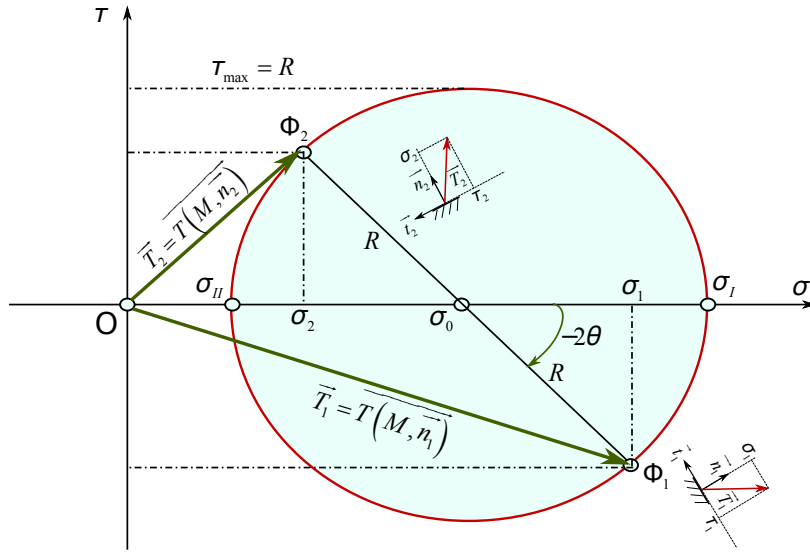


FIGURE 7.13 – cercle de MOHR des contraintes.

Généralisation (problème inverse)

Au cas où le tenseur des contraintes est connu dans une base quelconque :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}} \tag{7.18}$$

Deux vecteurs contraintes peuvent être facilement établis : \vec{T}_1 est celui qui agit sur la facette orientée par $\vec{n}_1 = \vec{e}_1$ et \vec{T}_2 celui qui agit sur la facette orientée par $\vec{n}_2 = \vec{e}_2$. Alors :

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{T}_1 &= \sigma_{11} \vec{e}_1 + \tau_{12} \vec{e}_2 = \sigma_{11} \vec{n}_1 + \tau_{12} \vec{t}_1 \end{aligned}$$

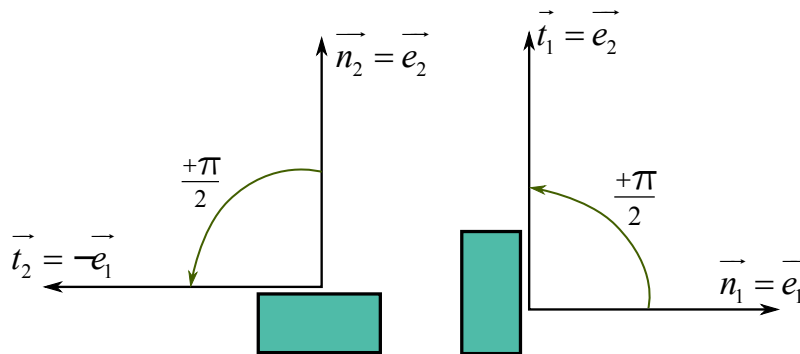


FIGURE 7.14 – vecteurs normaux et tangents.

et :

$$\begin{aligned} \vec{T}_2 &= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{T}_2 &= \tau_{12} \vec{e}_1 + \sigma_{22} \vec{e}_2 = \sigma_{22} \vec{n}_2 - \tau_{12} \vec{t}_2 \quad \text{car } \vec{t}_2 = -\vec{e}_1 \end{aligned}$$

Comme l'angle de rotation $\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}$ est égal à $\frac{\pi}{2}$, les points figuratifs Φ_1 et Φ_2 des vecteurs contraintes correspondants sont diamétralement opposés et, par conséquent, ces deux points caractérisent complètement le cercle de MOHR :

$$\begin{cases} \text{centre} & \sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \text{rayon} & \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\tau_{12}^2} \end{cases}$$

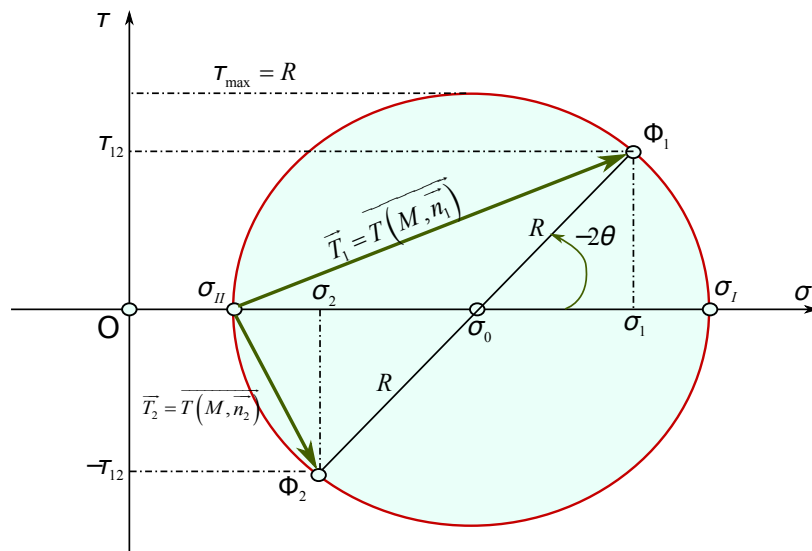


FIGURE 7.15 – construction du cercle de MOHR lorsque les contraintes principales sont inconnues.

De là on déduit aisément les contraintes principales :

$$\sigma_I = \sigma_0 + R \quad \sigma_{II} = \sigma_0 - R$$

Et ensuite les directions principales se déduisent de : $\tan(2\theta) = \frac{\tau_{12}}{\sigma_1 - \sigma_0} \Rightarrow \theta = -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\tau_{12}}{\sigma_1 - \sigma_0}\right)$ où θ est l'angle d'inclinaison du vecteur $\vec{n}_1 = \vec{e}_1$ par rapport à la direction principale \vec{e}_I

7.7 Conditions aux limites du solide exprimées en contraintes

Aux limites du solide, les vecteurs contraintes qui agissent sur les facettes qui tapissent l'enveloppe $\{\partial S\}$ ne sont autres que les forces surfaciques qui y sont appliquées.

Là où les forces de surface sont connues, c'est-à-dire sur $\{\partial S_f\}$ on écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{T(P)} = \overline{\overline{\sigma(P)}} \cdot \overrightarrow{n(P)} = \overrightarrow{f_s(P)} \quad \forall P \in \{\partial S_f\}} \quad (7.19)$$

Les étapes de traitement d'une condition limite en contraintes sont donc les suivantes :

1. détermination de l'équation du "bord" (surface en 3D ou ligne en 2D) : $\psi(P) = 0$;
2. détermination du vecteur normal extérieur $\overrightarrow{n(P)}$;
3. calcul du vecteur contrainte $\overline{\overline{\sigma(P)}} \cdot \overrightarrow{n(P)}$;
4. identification avec la force de surface : $\overrightarrow{T(P)} = \overrightarrow{f_s(P)}$; on en déduit alors des conditions portant sur le tenseur des contraintes.

7.8 Exercice

7.8.1 Enoncé

En un point M d'un milieu continu et à l'instant t , la matrice du tenseur de Cauchy dans une base cartésienne orthonormée fixe $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est donnée par l'expression suivante, où α est une constante adimensionnelle :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que le calcul des trois contraintes $\vec{T}(\vec{e}_i), i = 1, 2, 3$ et l'utilisation des propriétés des cercles de Mohr permettent de calculer les contraintes principales qu'on notera σ_1, σ_2 et σ_3 . Illustrer le cas $\alpha = 1$.
2. Déterminer les valeurs de α correspondant à un état triaxial de révolution.
3. Pour la suite de l'exercice, on pose $\alpha = 1$. Déterminer les directions principales de $\overline{\overline{\sigma}}$ en M .
4. Calculer la contrainte pour une facette de normale $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$. Tracer le point correspondant sur le cercle de Mohr.
5. Déterminer la valeur de la contrainte de cisaillement maximum ainsi que la direction de la normale correspondante.

7.8.2 Solution

On dispose de la matrice du tenseur des contraintes dans la base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix}$$

Suivant l'énoncé, et calculons les trois vecteurs contraintes existant au point M , pour des facettes de normales respectives \vec{e}_1, \vec{e}_2 , et \vec{e}_3 :

$$\vec{T}(\vec{e}_1) = \overline{\overline{\sigma}}\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7\alpha \\ 3.6\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = 0.7\alpha\vec{e}_1 + 3.6\alpha\vec{e}_2$$

$$\vec{T}(\vec{e}_2) = \overline{\overline{\sigma}}\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6\alpha \\ 2.8\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = 3.6\alpha\vec{e}_1 + 2.8\alpha\vec{e}_2$$

$$\vec{T}(\vec{e}_3) = \overline{\overline{\sigma}}\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0.7\alpha & 3.6\alpha & 0 \\ 3.6\alpha & 2.8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.6 \end{bmatrix} = 7.6\vec{e}_3$$

Chacun de ces vecteurs peut être décomposé en une composante normale et une composante tangentielle, afin d'être représentés dans le plan de Mohr. Par exemple, pour le vecteur contrainte appliquée à la facette de normale \vec{e}_1 , on peut écrire :

$$\vec{T}(\vec{e}_1) = T_{n1} \cdot \vec{e}_1 + T_{t1} \cdot \vec{t}_1$$

Dans cette équation très générale, \vec{t}_1 est un vecteur unitaire appartenant au plan de la facette, et T_{n1} et T_{t1} sont respectivement la composante normale et la composante tangentielle du vecteur contrainte. Par identification avec l'expression trouvée plus haut, on peut écrire :

$$\vec{t}_1 = \vec{e}_1$$

$$T_{n1} = 0.7\alpha \quad \text{et} \quad T_{t1} = 3.6\alpha$$

En appliquant la même opération à $\vec{T}(\vec{e}_2)$ et $\vec{T}(\vec{e}_3)$, on peut écrire de la même manière

$$T_{n2} = 2.8\alpha \quad \text{et} \quad T_{t2} = 3.6\alpha$$

$$T_{n3} = 7.6 \quad \text{et} \quad T_{t3} = 0$$

Avec ces résultats, on peut tout a fait placer sur le plan de Mohr les points correspondant a chacun de ces trois vecteurs contraintes. Il s'agira des points de coordonnées (T_{n1}, T_{t1}) , (T_{n2}, T_{t2}) , et (T_{n3}, T_{t3}) . Il faut noter pour l'instant que la connaissance de ces points n'est pas suffisante pour tracer le tricerclé de Mohr et donc pour déterminer les contraintes principales.

On doit maintenant appliquer certain nombre de raisonnements liés a des propriétés du cercle de Mohr. On remarque que la composante tangentielle de $\vec{T}(\vec{e}_3)$ est nulle, ce qui signifie par définition que \vec{e}_3 est une direction principal de contrainte. on en déduit donc que les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont situés dans le plan des deux autres directions principales, et que les points du plan de Mohr correspondant aux deux vecteurs contraintes liés a ces facettes sont situés sur le même cercle de Mohr. Par conséquent, les points (T_{n1}, T_{t1}) et (T_{n2}, T_{t2}) appartiennent tous les deux au même cercle de Mohr. C'est aussi le cas de leurs symétriques par rapport a l'axe horizontal, c'est-à-dire des points $(T_{n1}, -T_{t1})$ et $(T_{n2}, -T_{t2})$.

On tire enfin parti des règles d'orientation données dans le cours, et on observe que les deux facettes de normales \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont orthogonales, et donc les points qui leur correspondent dans le plan de Mohr sont nécessairement diamétralement opposés sur le cercle de Mohr auquel ils appartiennent. On en déduit que les coordonnées du centre du cercle de Mohr que l'on cherche sont au milieu d'un segment reliant deux points diamétralement opposés :

$$\left(\frac{T_{n1} + T_{n2}}{2}, 0 \right) = \left(\frac{0.7\alpha + 2.8\alpha}{2}, 0 \right) = (1.75\alpha, 0)$$

Le rayon de ce cercle se calcule ensuite par Pythagore :

$$R = \sqrt{(2.8\alpha - 1.75\alpha)^2 + (3.6\alpha)^2} = \alpha \sqrt{(2.8 - 1.75)^2 + (3.6)^2} = 3.75\alpha$$

On en déduit qu'une des contraintes principales est égale a $1.75\alpha - 3.75\alpha = -2\alpha$, et qu'une autre contrainte principale vaut $1.75\alpha + 3.75\alpha = 5.5\alpha$. quant a la troisième, on l'a déjà déterminée implicitement au début de l'exercice, et elle vaut 7.6. La situation est représentée dans le plan de Mohr pour $\alpha = 1$:

- Un état triaxial de révolution correspond a n'importe quel état de contraintes pour lequel deux des contraintes principales sont égales.

Dans notre cas, sans accorder d'attention a l'ordre des contraintes principales (puisque celui-ci dépend de α), on peut énoncer que les contraintes principales sont égales a :

$$\sigma_1 = -2\alpha \quad ; \quad \sigma_2 = 5.5\alpha \quad ; \quad \sigma_3 = 7.6$$

On peut relever dans le cas présent trois situations pour lesquelles l'état de contraintes est triaxial de révolution :

$$\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow -2\alpha = 5.5\alpha \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 \Rightarrow -2\alpha = 7.6 \Rightarrow \alpha = -3.8$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 \Rightarrow 5.5\alpha = 7.6 \Rightarrow \alpha = 1.38$$

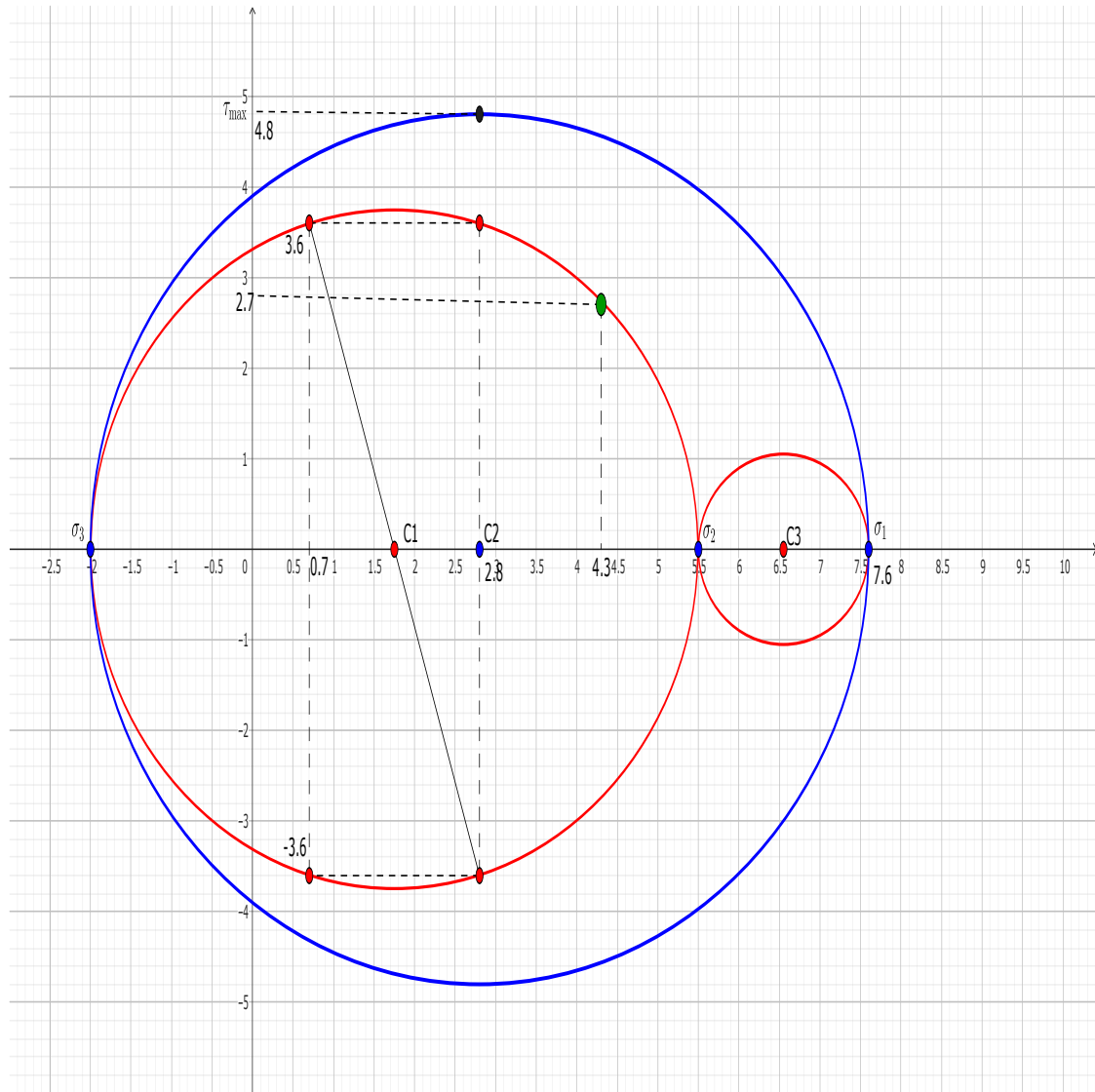


FIGURE 7.16 – construction du cercle de MOHR.

— On pose $\alpha = 1$, on ordonne les contraintes, et on a donc $\sigma_1 = 7.6$, $\sigma_2 = 5.5$, et $\sigma_3 = -2$. On cherche à trouver les directions principales de $\bar{\sigma}$ en M . On a déjà démontré que \vec{e}_3 est une direction propre, et lorsque $\alpha = 1$ cette direction propre est celle de la contrainte principale maximale. On peut donc énoncer sans calcul que :

$$\vec{c}_1 = \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On cherche alors les coordonnées des deux autres vecteurs principaux, tels que :

$$\vec{c}_2 = c_{2,1} \cdot \vec{e}_1 + c_{2,2} \cdot \vec{e}_2$$

$$\vec{c}_3 = c_{3,1} \cdot \vec{e}_1 + c_{3,2} \cdot \vec{e}_2$$

On applique la formule classique définissant une direction principale de contrainte :

$$\bar{\sigma} \vec{c}_i = \sigma_i \vec{c}_i$$

On aura donc :

$$\overline{\sigma} \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 3.6 & 0 \\ 3.6 & 2.8 & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{2,1} \\ c_{2,2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7c_{2,1} + 3.6c_{2,2} \\ 3.6c_{2,1} + 2.8c_{2,2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc on obtient :

$$\overline{\sigma} \vec{c}_2 = (0.7c_{2,1} + 3.6c_{2,2}) \vec{e}_1 + (3.6c_{2,1} + 2.8c_{2,2}) \vec{e}_2$$

Par ailleurs on a :

$$\overline{\sigma} \vec{c}_2 = \sigma_2 \vec{c}_2 = 5.5 \cdot (c_{2,1} \vec{e}_1 + c_{2,2} \vec{e}_2)$$

On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} 5.5c_{2,1} = 0.7c_{2,1} + 3.6c_{2,2} \\ 5.5c_{2,2} = 3.6c_{2,1} + 2.8c_{2,2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4.8c_{2,1} + 3.6c_{2,2} = 0 \\ 3.6c_{2,1} - 2.7c_{2,2} = 0 \end{cases}$$

La solution du système est trivial donc on doit ajouter une équation afin de le résoudre. On va utiliser le fait le vecteur \vec{c}_2 est unitaire. On a donc un nouveau système :

$$\begin{cases} -4.8c_{2,1} + 3.6c_{2,2} = 0 \\ c_{2,1}^2 + c_{2,2}^2 = 1 \end{cases}$$

De la première équation il vient $c_{2,1} = \frac{3}{4}c_{2,2}$, que l'on peut intégrer dans la seconde équation :

$$c_{2,2}^2 + \frac{9}{16}c_{2,2}^2 = 1$$

finalemt on obtient :

$$\vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On va maintenant tirer parti du fait que $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ est une base orthonormée directe. on peut donc utiliser le produit vectoriel et écrire :

$$\vec{c}_3 = \vec{c}_1 \wedge \vec{c}_2$$

Donc on a :

$$\vec{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 0.6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

— On définit la facette de normale $\vec{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$. Le vecteur contrainte subi par cette facette s'obtient directement par la formule du cours :

$$\vec{T}(\vec{n}_1) = \overline{\sigma} \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 3.6 & 0 \\ 3.6 & 2.8 & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 4.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour tracer le point correspondant a ce vecteur contrainte dans le plan de Mohr, on a besoin d'une composante normale et d'une composante tangentielle. La composante normale s'obtient, comme d'habitude, par projection du vecteur $\vec{T}(\vec{n}_1)$ sur la direction normale a la facette :

$$T_n = \vec{T}(\vec{n}_1) \cdot \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 4.5 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = 4.3$$

Le vecteur contrainte $\vec{T}(\vec{n}_1)$ est la somme d'un vecteur $T_n \vec{n}_1$ orienté dans la direction normale et d'un autre vecteur orienté dans une direction tangentielle \vec{t}_1 qui n'est pas connue. La composante tangentielle est donc la norme du vecteur obtenu en retranchant la composante normale du vecteur $\vec{T}(\vec{n}_1)$ à lui-même :

$$T_t = \left\| \vec{T}(\vec{n}_1) - T_n \vec{n}_1 \right\|$$

$$T_t = \left\| \begin{bmatrix} 2.4 \\ 4.5 \\ 0 \end{bmatrix} - 4.3 \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = 2.7$$

On peut alors reporter le point sur le graphique (voir figure précédente).

— La contrainte de cisaillement maximale est donc donnée par :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 4.8$$

L'abscisse du point correspondant sur le plan de Mohr correspond à celle du centre du grand cercle de Mohe, soit :

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 2.8$$

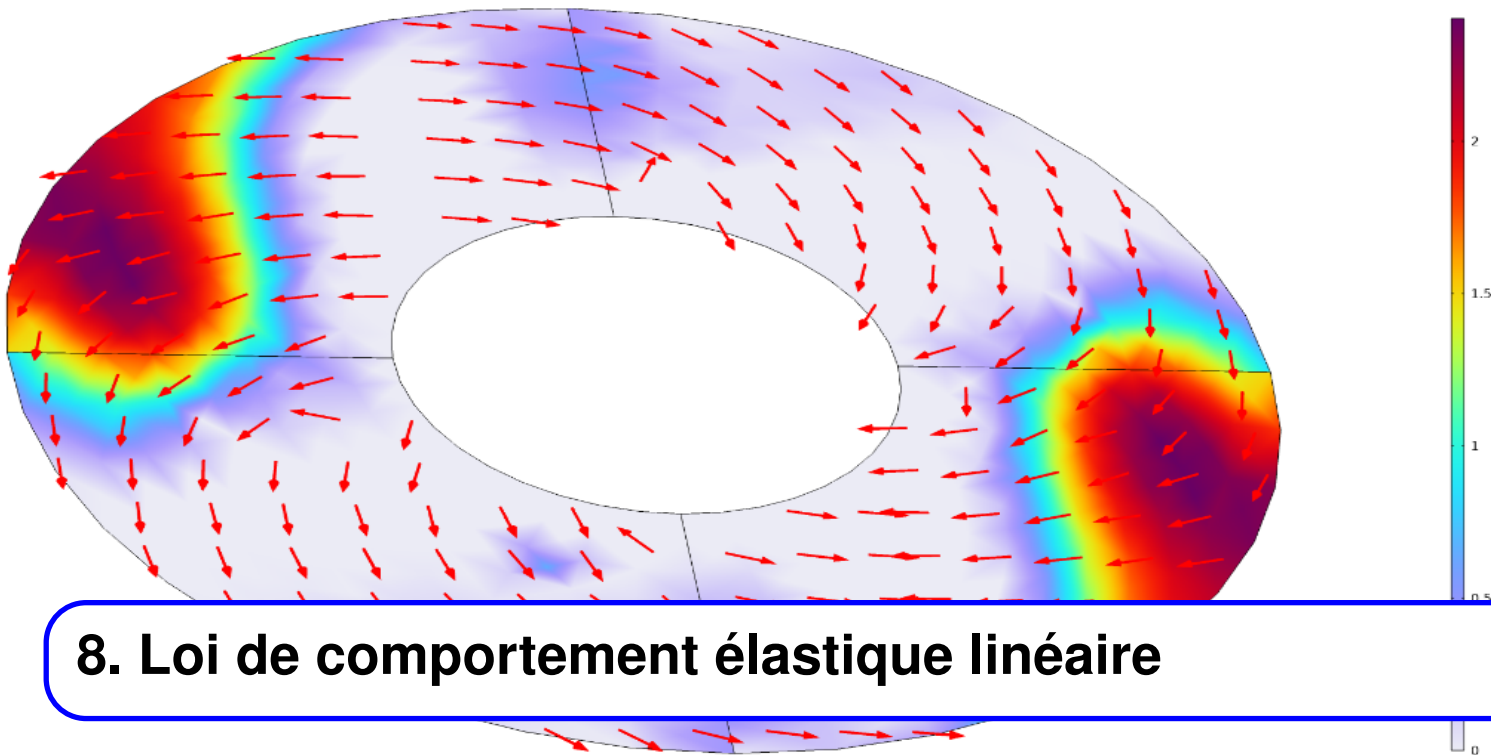
Par définition, la facette qui reçoit cette contrainte possède une normale qui appartient au plan des deux directions principales \vec{c}_1 et \vec{c}_3 (qu'on appelle "plan de cisaillement maximal"). En fait, la facette de cisaillement maximal correspond toujours à une orientation située selon la bissectrice des directions principales \vec{c}_1 et \vec{c}_3 , qui est donc donnée par :

$$\frac{\vec{c}_1 + \vec{c}_3}{2} = \begin{bmatrix} \frac{0-0.8}{2} \\ \frac{0+0.6}{2} \\ \frac{1+0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

IV

ÉLASTICITÉ

8	Loi de comportement élastique linéaire	121
8.1	Introduction	
8.2	Hypothèses	
8.3	Formulations de la loi élastique linéaire	
9	Méthodes de résolution des problèmes d'élasticité	129
9.1	Problème d'élasticité	
9.2	Méthode de NAVIER	
9.3	Méthode de BELTRAMI-MITCHEL	
9.4	Unicité de la solution d'un problème d'élasticité	
9.5	Méthode de RITZ	
9.6	Élasticité bidimensionnelle	
9.7	Élasticité axisymétrique	
9.8	Exercice	
	Bibliographie	151
	Index	153



8. Loi de comportement élastique linéaire

8.1 Introduction

La théorie de l'élasticité est un champ particulier d'étude des matériaux solides dans lequel on considère que contraintes et déformations sont liées par une relation "linéaire".

Cela induit deux conséquences :

- les effets (déformations) sont proportionnels aux causes (contraintes); si l'on considère une sollicitation mono-axiale, cela revient à écrire $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Cette proportionnalité est d'ailleurs transposable aux autres réponses du solide (ou d'une structure composée de solides élastiques) et notamment les déplacements qui deviennent proportionnels ou plus exactement linéairement dépendants des efforts appliqués.
- les déformations sont réversibles. Lorsque la cause cesse, les déformations s'annulent.

En pratique, les matériaux de construction suivent des lois de comportement très variées et souvent complexes.

Par exemple :

les aciers suivent une loi "élastoplastique" : s'ils sont déformés au-delà d'une valeur seuil ε_e , la linéarité n'est plus satisfaite. Toutefois, si la déformation vient à décroître $\dot{\varepsilon} < 0$ alors on retrouve la linéarité mais exprimée en terme d'accroissements : $d\sigma = E \cdot d\varepsilon$.

Malgré ce retour à un comportement linéaire, une irréversibilité apparaît sous la forme d'une déformation résiduelle alors même que la contrainte s'annule : c'est une déformation plastique ε_p .

Le béton et d'autres matériaux poreux "s'endommagent" lorsque la contrainte qui leur est appliquée dépasse un certain seuil (voisin de la moitié de leur résistance initiale). L'endommagement résulte de l'apparition de microdiscontinuités au sein du matériau (microfissuration, effondrement de la structure poreuse, décohésion des particules) et se traduit à la fois par une réduction de la pente $E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ et par des déformations irréversibles.

- S'il est sollicité durablement à moins de la moitié de sa résistance, le béton présente les

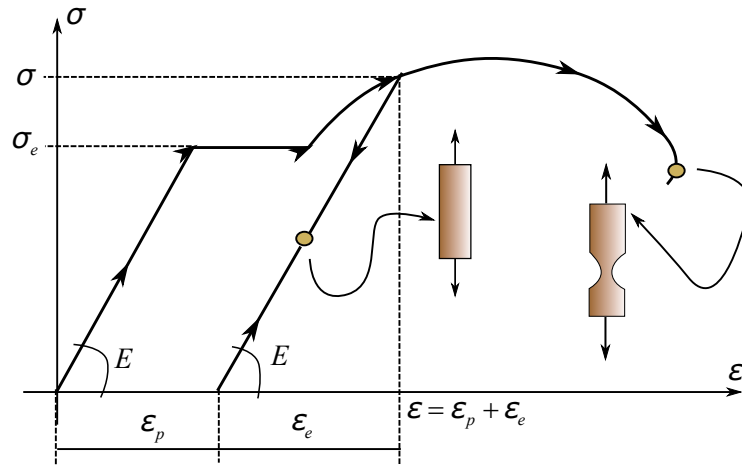


FIGURE 8.1 – Courbe de traction.

caractéristiques d'un matériau viscoélastique. Cela signifie que les déformations augmentent dans le temps alors même que la charge reste constante. Dans une action mono-axiale de compression appliquée à l'instant t_0 , la déformation à l'instant t est exprimée par une fonction de fluage $J(t_0, t)$ telle que $\varepsilon(t) = J(t_0, t) \cdot \sigma_0$

S'ajoutent à cela d'autres considérations :

- les déformations peuvent résulter d'une dilatation thermique $\varepsilon_{th} = \alpha \Delta T$;
- le caractère cyclique d'un chargement provoque le phénomène de "fatigue" à l'origine d'un endommagement alors même que le niveau de sollicitation est relativement faible eu égard à la résistance du matériau (figure 8.2) ;
- le caractère triaxial de certains chargements ;
- la capacité de consolidation sous charge hydrostatique de certains matériaux ;
- la possibilité de viscoplasticité ;
- la non-symétrie de comportement des matériaux en traction et en compression (béton) ;
- la nature anisotrope de certains matériaux (le bois, les céramiques extrudées, les matériaux composites à base de fibres) ;
- la nature composite de certains solides (béton armé, composites à base de carbone) ;
- la sensibilité des caractéristiques mécaniques des matériaux avec la température (tous), voire avec l'hygrométrie (bois, béton) ;
- le caractère évolutif, vieillissant, des matériaux au cours de leur histoire du fait de la migration de l'eau ou d'espèces chimiques (béton, verre) ;
- le couplage avec des actions physicochimiques (rayonnement électromagnétique, adsorption-désorption, attaques chimiques, corrosion) ;
- les effets dynamiques (chocs).

On le voit, l'hypothèse du comportement élastique des matériaux ne rend pas compte de tous les phénomènes évoqués ci-dessus. Néanmoins, il s'agit d'une loi applicable pourvu que le niveau de contrainte ne soit pas trop élevé. Les ingénieurs s'appuient donc sur cette hypothèse en première intention et effectuent des vérifications supplémentaires a posteriori ; c'est ainsi qu'en béton armé, par exemple, il est loisible de déterminer les sollicitations avec l'hypothèse de l'élasticité, de dimensionner les sections aux états limites de service avec cette même hypothèse, les règles Européennes de calcul (Eurocodes) fixant les modalités de calcul.

Lorsque la situation l'exige (ouvrages spéciaux, requête d'une grande précision, recherche) des modèles plus élaborés sont développés ou utilisés moyennant leur implémentation dans des codes

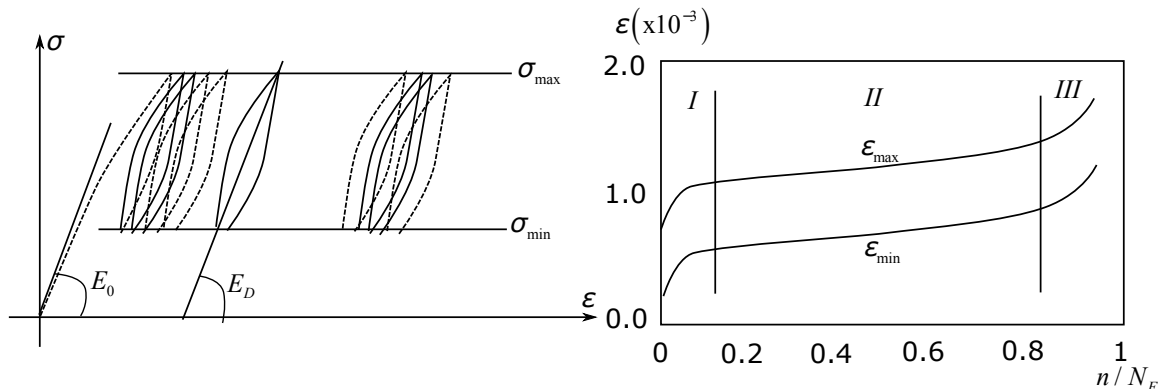


FIGURE 8.2 – Courbe déformation - nombre de cycles.

de calcul numérique.

8.2 Hypothèses

8.2.1 Expérimentation

Sans entrer dans le détail des expériences propres à "identifier" le comportement mécanique de tous les matériaux, attardons-nous sur la caractérisation de deux d'entre eux : l'acier et le béton (vis-à-vis des actions de courte durée).

8.2.2 Comportement de l'acier (test de traction)

Une éprouvette cylindrique profilée est placée entre les mors d'une presse de traction. Elle est équipée de jauges extensométriques permettant de mesurer à la fois la déformation axiale ϵ_{11} (modification de longueur) et la déformation transversale ϵ_{22} (modification du périmètre). Elle est soumise à l'action d'un effort de traction F croissant. On admet que, dans la zone centrale de longueur initiale L , la contrainte de traction σ_{11} est uniforme et vaut $\sigma = \frac{F}{A}$ où A est l'aire de la section droite initiale.

L'essai est asservi en déformation et l'on enregistre l'évolution du couple $\{\epsilon_{11}, \sigma_{11}\} = \{\epsilon, \sigma\}$ à vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ constante. On observe quatre étapes :

1. une étape où ϵ et σ croissent proportionnellement l'un à l'autre et ce tant que la contrainte reste inférieure à une valeur σ_e appelée "limite élastique"; cette valeur est voisine de 360 MPa pour les aciers doux de construction par exemple et peut atteindre 1600 MPa pour l'acier constitutif des câbles de précontrainte. Pendant cette étape, si l'on décharge l'éprouvette, on observe la réversibilité totale de l'histoire de chargement. Lorsque la contrainte s'annule, on n'observe pas de déformation résiduelle. Cette phase est appelée "phase élastique". Elle est caractérisée par le rapport constant $\frac{\sigma}{\epsilon} = E$ appelé "module d'élasticité". Ce module est voisin de 200 000 MPa = 200 GPa pour la plupart des aciers. Si l'on observe la déformation transversale, on constate qu'elle est négative : alors que l'éprouvette s'allonge, la section se réduit. De plus le rapport $\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}}$, négatif, est également constant. On note $\epsilon_{22} = -\nu\epsilon_{11}$ où ν est le coefficient de contraction encore appelé coefficient de POISSON. ν est adimensionnel et vaut approximativement 0.3 pour les aciers. Ainsi, en régime élastique :

$$\sigma_{11} = E\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} = -\nu\epsilon_{11} \quad (8.1)$$

2. une étape au cours de laquelle la déformation augmente alors que la contrainte reste constante. Ce palier est appelé "palier plastique" et on dit que le matériau "s'écoule". Au niveau

nanoscopique, cette phase s'accompagne de réajustements au sein du réseau atomique : les dislocations issues des irrégularités locales se propagent. Si l'on venait à stopper puis inverser la vitesse de déformation, on observerait immédiatement une diminution de la contrainte. Le rapport $\frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$ reprend alors la valeur qu'il avait en régime élastique ; c'est la preuve que le matériau n'est pas endommagé ; par contre une déformation résiduelle ε_p subsiste lorsque la contrainte devient nulle.

3. si l'on poursuit l'augmentation des déformations on observe la reprise de l'augmentation de contrainte. Les dislocations étant épuisées, des glissements s'opèrent dans la structure atomique. Le matériau "s'écrouit". Si l'on décharge l'éprouvette à partir du niveau de contrainte $\sigma_s > \sigma_e$ on constate que le module n'a toujours pas changé, la déformation plastique a augmenté quant à elle. Si l'on recharge le matériau, il adopte un comportement élastique ($\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E$) et l'écrouissage reprend à la valeur σ_s de la contrainte comme si le matériau avait gardé cette valeur en mémoire.
4. la déformation axiale continuant d'augmenter, la valeur de σ passe par une valeur maximale, considérée comme étant la "contrainte à la rupture" du matériau. S'en suit une diminution de la contrainte de traction accompagnant une réduction localisée de la section de l'éprouvette : c'est la "striction". L'essai peut être poursuivi jusqu'à la séparation de l'éprouvette en deux morceaux.

8.3 Formulations de la loi élastique linéaire

Si la sollicitation agissant sur le solide induit un champ de contrainte multiaxial, l'élasticité linéaire se traduit par une relation linéaire entre les tenseurs contrainte et déformation (à l'effet de température près) :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{S}} (\bar{\bar{\sigma}} - \bar{\bar{\sigma}}_0) + \bar{\bar{\alpha}} \delta T \quad (8.2)$$

À la température de référence T_0 , le solide peut être le siège d'un champ de contraintes résiduelles dites "autocontraintes" $\bar{\bar{\sigma}}_0$ en l'absence même de forces extérieures.

$\bar{\bar{S}}$ est le tenseur (ordre 4) des "compliances".

$\bar{\bar{\alpha}}$ est le tenseur des coefficients de dilatation. Cette expression (8.2) se simplifie lorsque le matériau est isotrope, ce que nous supposons dans la suite.

8.3.1 Loi de HOOKE-DUHAMEL

La loi de HOOKE-DUHAMEL synthétise en les généralisant les hypothèses précédentes au cas des sollicitations multiaxiales appliquées à un solide homogène isotrope. Elle exprime le tenseur des déformations en fonction du tenseur des contraintes.

R Robert Hooke, né à Freshwater en 1635 et mort à Londres en 1703, est un scientifique pluridisciplinaire anglais. Il est considéré comme l'un des plus grands scientifiques expérimentaux du 17^{ème} siècle et l'une des figures clés de la révolution scientifique de l'époque moderne. L'historien britannique des sciences Allan Chapman l'a appelé le «*Léonard d'Angleterre*».

Ainsi :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{(1+\nu)}{E} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{I}} + \underbrace{\alpha \delta T \bar{\bar{I}}}_{\varepsilon_{th}} \quad (8.3)$$



Robert Hooke
1635 - 1703

Dans cette relation apparaissent :

- E le module d'élasticité ou **module de YOUNG**. Sa dimension est celle d'une contrainte $[E] = [F.L^{-2}]$, son unité *SI* est le Pascal (Pa) à laquelle on préférera le mégaPascal (MPa, voire le gigaPascal GPa) par commodité dans toutes les applications courantes.



Thomas Young
1773 - 1829

R Thomas Young, né à Milverton en 1773 et mort à Londres en 1829, est un physicien, médecin et égyptologue britannique. Son excellence dans de nombreux domaines non reliés fait qu'il est considéré comme un polymathe, au même titre par exemple que Léonard de Vinci. Son savoir était si vaste qu'il fut connu sous le nom de phénomène Young. Il exerça la médecine toute sa vie, mais il est surtout connu pour sa définition du module de Young en science des matériaux.

- ν le coefficient de réduction ou **coefficient de Poisson**. Il est sans dimension et est compris dans l'intervalle $[0;0.5]$.



Siméon Denis Poisson
1781 - 1840

R Siméon Denis Poisson, né à Pithiviers en 1781 et mort à Sceaux en 1840, est un mathématicien, géomètre et physicien français. Sa contribution la plus essentielle concerne l'électricité et le magnétisme qu'il contribua à fonder. Il fit une correction célèbre de l'équation de Laplace au second degré pour le potentiel, de nos jours appelée l'équation de Poisson, publiée en 1813. C'est aussi dans son traité de mécanique qu'il introduit le coefficient qui porte son nom et qui est un des éléments fondamentaux de la théorie de l'élasticité.

- α le coefficient de dilatation thermique. Sa dimension est celle de l'inverse d'une température $[\alpha] = [T^{-1}]$ et son unité est donc l'inverse de KELVIN (K^{-1}); δT représente la différence de température avec la température T_0 de référence.

Cette relation montre, chose importante, que les directions principales de contrainte et de déformation sont confondues.

8.3.2 Loi de GABRIEL LAMÉ

La loi de LAMÉ-DUHAMEL est réciproque de la précédente (eq. 8.3) dans la mesure où, cette fois, ce sont les contraintes qui sont exprimées en terme de déformation (et de température) :

$$\bar{\sigma} = 2\mu\bar{\varepsilon} + \lambda tr(\bar{\varepsilon})\bar{I} - \beta\delta T\bar{I} \quad (8.4)$$

Relation dans laquelle :

- μ est le 1^{er} coefficient de LAMÉ. On remarque que, si l'état de contrainte est réduit à une contrainte de cisaillement σ_{12} , alors $\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$. Sa dimension est celle d'une contrainte $[\mu] = [F.L^{-2}]$ et son unité le Pascal (Pa).
- λ est le 2nd coefficient de LAMÉ. Dimension : celle d'une contrainte $[\lambda] = [F.L^{-2}]$ et unité : Pascal (Pa).
- β est un coefficient de contrainte thermique : on voit clairement que si les déformations sont bloquées (matériau confiné) alors qu'il y a augmentation de température, se développe un état de contrainte sphérique dont la composante est négative (pression) $\sigma^{\text{thermique}} = -p = -\beta\delta T$. La dimension de β est donc celle du rapport contrainte / température : $[\beta] = [F.L^{-2}.T^{-1}]$. Ce coefficient s'exprime en Pascal par Kelvin (Pa/K).

8.3.3 Relations entre coefficients

L'équivalence des relations (eq. 8.4) et (eq. 8.3) permet d'établir les relations de dépendance entre les divers coefficients. On a ainsi :

LAMÉ → HOOKE

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \beta = \frac{\alpha E}{(1-2\nu)} \\ 2\mu + \lambda = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu} \end{array} \right. \quad (8.5)$$

HOOKE → LAMÉ

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\ \alpha = \frac{\beta}{3\lambda+2\mu} \\ \frac{1}{1+\nu} = \frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu} \\ \frac{\nu}{1+\nu} = \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \end{array} \right. \quad (8.6)$$

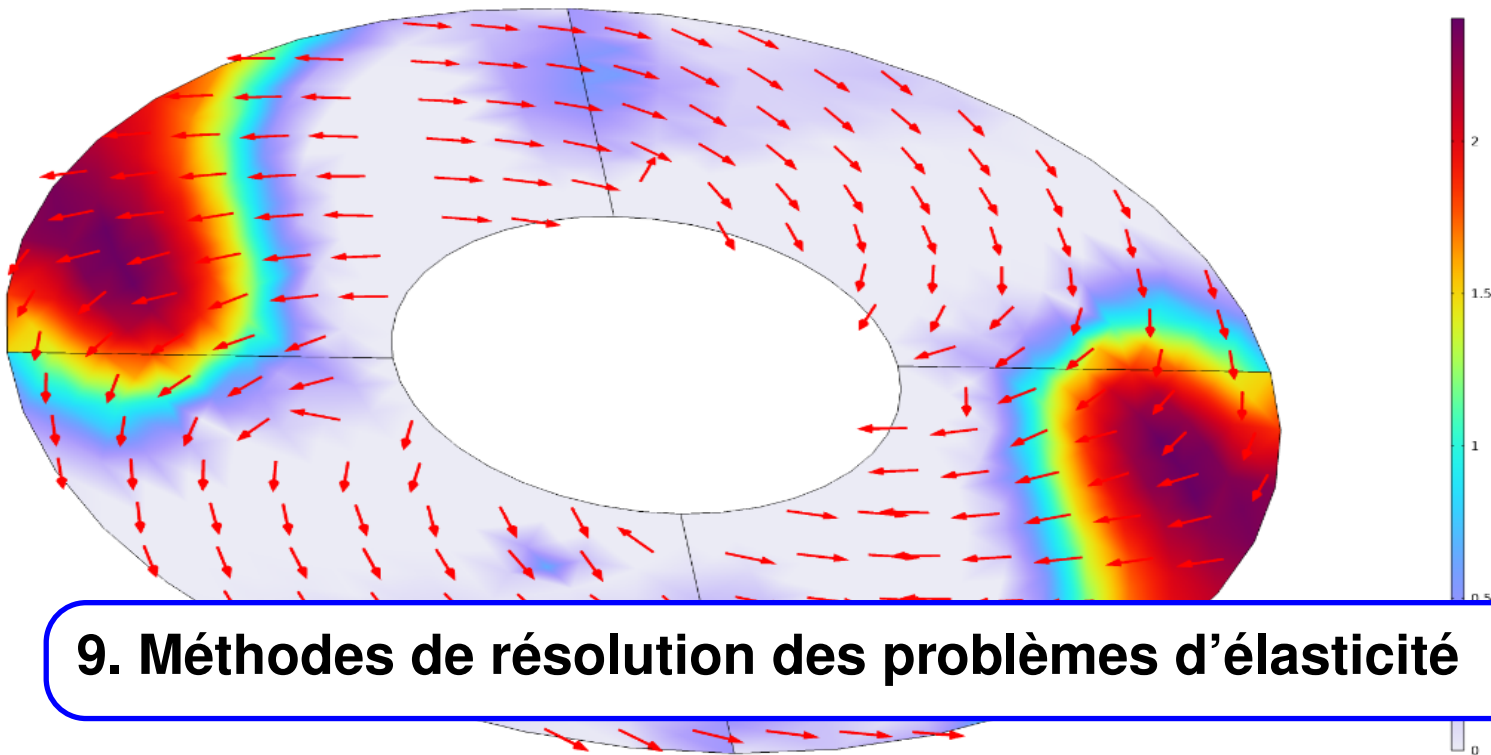
8.3.4 Formulations croisées

La combinaison des relations précédentes permet d'exprimer le tenseur des contraintes en fonction du tenseur des déformations et de la température, à l'aide seule du module de Young, du coefficient de Poisson et du coefficient de dilatation thermique :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \left(\bar{\bar{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\bar{\bar{\varepsilon}}) \bar{\bar{I}} \right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \Delta T \bar{\bar{I}} \quad (8.7)$$

Et inversement :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu} \left(\bar{\bar{\sigma}} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{I}} \right) + \frac{\beta}{3\lambda+2\mu} \Delta T \bar{\bar{I}} \quad (8.8)$$



9. Méthodes de résolution des problèmes d'élasticité

9.1 Problème d'élasticité

9.1.1 Position du problème

On considère un solide $\{S\}$ soumis à des forces de volume $\vec{f}_v(M)$ délimité par son enveloppe (∂S) . Cette enveloppe est partitionnée en (voir figure

- (∂S_u) lieu des déplacements connus (surface d'appui);
- (∂S_f) lieu des forces de surfaces connues $\vec{f}_s(P)$.

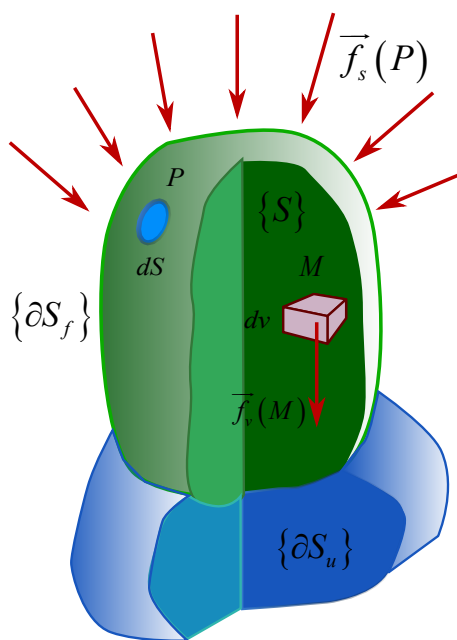


FIGURE 9.1 – Données d'un problème d'élasticité.

On suppose aussi les hypothèses suivantes réunies :

1. hypothèse de continuité ;
2. hypothèse des petites perturbations (HPP) : les déplacements sont petits devant les dimensions du solide de sorte que l'on puisse, en première approximation, établir les équations d'équilibre dans la configuration initiale, non déformée de la structure ;
3. hypothèse de l'élasticité du comportement du solide. On suppose de plus les déformations petites et réversibles ainsi que la validité de la loi de HOOKE.

9.1.2 Objectif

1. déterminer le champ de contraintes $\overline{\overline{\sigma}}(M)$. L'ingénieur a besoin de connaître le niveau de sollicitation du solide dans différentes conditions de chargement. La connaissance du champ de contrainte lui permet de statuer sur la résistance du solide et la réversibilité des déformations.
2. déterminer le champ de déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}(M)$.
3. déterminer le champ de déplacement $\overline{u}(M)$ et statuer sur le bon fonctionnement d'un ensemble mécanique ou d'une ossature d'une structure.

9.1.3 Récapitulation des équations disponibles

Équations concernant le champ de contrainte

Équilibre statique :

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}} \quad (9.1)$$

$$\boxed{\text{div} \overline{\overline{\sigma}} + \overline{f}_v = \overline{0}} \quad (9.2)$$

Conditions aux limites :

$$\boxed{\overline{T}(\overline{P}) = \overline{\overline{\sigma}}(\overline{P}) \cdot \overline{n}(\overline{P}) = \overline{f}_s(\overline{P}) \quad \forall P \in \{\partial S_f\} \quad \text{et} \quad \overline{n} \perp \{\partial S\} \quad \text{sortant}} \quad (9.3)$$

Équations concernant le champ de déformation et le champ de déplacement

Équations de compatibilité :

$$\boxed{\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{\varepsilon}}^T \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}} \quad (9.4)$$

$$\boxed{\overline{\overline{\text{grad}}}(\overline{\text{div}}(\overline{\overline{\varepsilon}})) + \overline{\overline{\text{grad}}}^T(\overline{\text{div}}(\overline{\overline{\varepsilon}})) - \overline{\overline{\text{grad}}}(\overline{\text{grad}}(\text{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}})\overline{\overline{\varepsilon}})) - \Delta(\overline{\overline{\varepsilon}}) = \overline{0}} \quad (9.5)$$

Relation déplacement - déformations :

$$\boxed{\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \overline{u} + \overline{\overline{\text{grad}}}^T \overline{u} \right)} \quad (9.6)$$

Conditions aux limites :

$$\boxed{u_i = u_i^0 \quad \text{sur} \quad \{\partial S_u\}} \quad (9.7)$$

Loi de comportement

Les lois suivantes sont toutes équivalentes :

Loi de HOOKE-DUHAMEL :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{(1+\nu)}{E} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} tr(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{I}} + \underbrace{\alpha \Delta T \bar{\bar{I}}}_{\varepsilon_{th}} \quad (9.8)$$

inversement :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu} \left(\bar{\bar{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) \bar{\bar{I}} \right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \Delta T \bar{\bar{I}} \quad (9.9)$$

Loi de LAME-DUHAMEL :

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}} + \lambda tr(\bar{\bar{\varepsilon}}) \bar{\bar{I}} - \beta \Delta T \bar{\bar{I}} \quad (9.10)$$

et :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2\mu} \left(\bar{\bar{\sigma}} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} tr(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{I}} \right) + \frac{\beta}{3\lambda + 2\mu} \Delta T \bar{\bar{I}} \quad (9.11)$$

Bilan

Résoudre un problème d'élasticité, c'est déterminer 15 fonctions du point qui, en coordonnées cartésiennes sont : $\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, u_1, u_2, u_3, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}\}$. pour cela on dispose de 3 équations de d'équilibre local, de 6 relations de comportement et de 6 équations de compatibilité; soient 15 équations au total.

Le problème est donc bien posé; a priori, une solution analytique devrait pouvoir être dégagée pour chaque problème. En pratique, le recours au calcul numérique, basé sur le découpage du solide en petits éléments volumiques appelés éléments finis, sera nécessaire dans la plupart des situations concrètes.

NOTE : Le nombre d'équations statiques est inférieur au nombre d'inconnues statiques : le seul recours aux équations de statique ne permet généralement pas de résoudre un problème d'élasticité, sauf à réduire le nombre d'inconnues par des hypothèses supplémentaires. Un solide, vu sous l'angle de la mécanique des milieux continus, constitue un système hyperstatique.

Méthodologie

Pour résoudre un problème d'élasticité, l'ingénieur est obligé de combiner entre elles les équations ci-dessus. Avant cela, il doit s'assigner un objectif primaire : veut-il aborder le problème sous l'angle des forces internes auquel cas il s'attachera à déterminer en priorité le champ de contraintes ou préférera t-il d'abord établir le champ de déplacement ?

Quel que soit l'objectif primaire, les autres inconnues en seront ensuite déduites en parcourant dans un sens ou dans l'autre le cercle méthodologique ci-contre.

La résolution du problème, une fois l'objectif choisi, se "réduit" à la recherche de solutions analytiques d'un jeu d'équations aux dérivées partielles plutôt générales et qui font l'objet des paragraphes suivants. Il faut y adjoindre les conditions aux limites pour que la solution particulière, unique, se dessine complètement.

Si le problème présente des particularités géométriques, elles sont prises en compte le plus tôt possible de sorte à réduire la complexité mathématique. Parmi les simplifications possibles, notons les situations suivantes qui feront l'objet d'un développement particulier ultérieur :

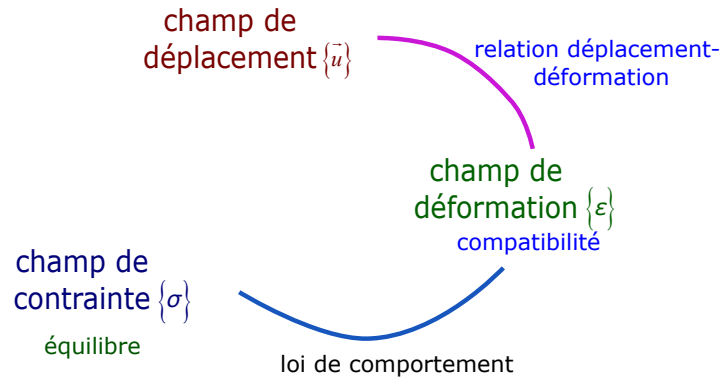


FIGURE 9.2 – Méthodologie de résolution d'un problème d'élasticité.

- état plan de contrainte ;
- état plan de déformation ;
- problème axisymétrique.

9.2 Méthode de NAVIER

9.2.1 Principe

La méthode de Navier s'inscrit dans une "méthode des déplacements". On l'emploie chaque fois que l'objectif primaire est la détermination du champ de déplacement. Pour obtenir les équations différentielles permettant la détermination du champ $\{\overline{u}(M)\}$, on combine tour à tour :

- l'équation d'équilibre local ;
- la loi de comportement élastique (forme de LAME) ;
- la relation déplacement - déformation.

9.2.2 Équations

Équilibre local (9.2) :

$$\overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} + \overrightarrow{f_v} = \overrightarrow{0}$$

Compte tenu de la loi de LAME (9.10) en conditions isothermes :

$$\overrightarrow{\text{div}} \left[2\mu \overline{\overline{\varepsilon}} + \lambda \text{tr}(\overline{\overline{\varepsilon}}) \overline{\overline{I}} \right] + \overrightarrow{f_v} = \overrightarrow{0}$$

Puis de la relation déplacement - déformation (9.6) :

$$2\mu \overrightarrow{\text{div}} \left[\frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \overline{\overline{u}} + \overline{\overline{\text{grad}}}^T \overline{\overline{u}} \right) \right] + \lambda \overrightarrow{\text{div}} \left(\text{div} \overline{\overline{u}} \cdot \overline{\overline{I}} \right) + \overrightarrow{f_v} = \overrightarrow{0}$$

Or : $\overrightarrow{\text{div}}(w \cdot \overline{\overline{I}}) = \overline{\overline{\text{grad}}}(w)$, $\overrightarrow{\text{div}} \left(\overline{\overline{\text{grad}}}^T \overline{\overline{u}} \right) = \overline{\overline{\text{grad}}} \text{div} \overline{\overline{u}}$ et encore : $\overrightarrow{\text{div}} \left(\overline{\overline{\text{grad}}} \overline{\overline{u}} \right) = \overline{\overline{\Delta}} \overline{\overline{u}}$

Donc :

$$\mu \overline{\overline{\Delta}} \overline{\overline{u}} + (\mu + \lambda) \overline{\overline{\text{grad}}} \text{div} \overline{\overline{u}} + \overrightarrow{f_v} = \overrightarrow{0}$$

En notant que $\overline{\overline{\Delta}} \overline{\overline{u}} = \overline{\overline{\text{grad}}} \text{div} \overline{\overline{u}} - \mu \overline{\overline{\text{rot}}} \overline{\overline{\text{rot}}} \overline{\overline{u}}$, il vient l'autre forme de la même équation :

$$(\lambda + 2\mu) \overline{\overline{\text{grad}}} \text{div} \overline{\overline{u}} - \mu \overline{\overline{\text{rot}}} \overline{\overline{\text{rot}}} \overline{\overline{u}} + \overrightarrow{f_v} = \overrightarrow{0}$$

Résumons ici les équations de NAVIER pour mémoire :

$$\boxed{\mu \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{u} + (\mu + \lambda) \overrightarrow{grad} \overrightarrow{div} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{f}_v = \overrightarrow{0}} \quad (9.12)$$

$$\boxed{(\lambda + 2\mu) \overrightarrow{grad} \overrightarrow{div} \overrightarrow{u} - \mu \overrightarrow{rot} \overrightarrow{rot} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{f}_v = \overrightarrow{0}} \quad (9.13)$$

A quoi il convient d'ajouter les conditions limites en déplacement déjà énoncées (9.7) :

$$u_i = u_i^0 \quad \text{sur} \quad \{\partial S_u\}$$

9.2.3 Champ de déplacement cinématiquement admissible

On appelle "champ de déplacement cinématiquement admissible" (champ CA) tout champ de déplacement virtuel $\{\overrightarrow{u}^*\}$ continu et dérivable (au moins par morceau) et satisfaisant les conditions aux limites du solide :

$$u_i^* = u_i^0 \quad \text{sur} \quad \{\partial S_u\}$$

De tels champs sont utilisés dans les méthodes approchées (par exemple la méthode de RITZ en éléments finis ou encore dans les méthodes d'analyse limite en calcul élastoplastique des structures métalliques).

NOTE : Le champ de déplacement "réel" (solution exacte des équations de Navier) est cinématiquement admissible.

9.3 Méthode de BELTRAMI-MITCHEL

9.3.1 Principe

La méthode de Beltrami constitue une "méthode des forces"; elle est utilisée lorsque l'objectif primaire est d'établir le champ de contrainte. Pour cela, on écrit les équations de compatibilité en terme de contraintes grâce à la loi de comportement élastique tout en prenant en compte l'équilibre local.

9.3.2 Équations

Partons des 6 équations de compatibilité (9.5) :

$$\overrightarrow{grad} \left(\overrightarrow{div} (\overline{\overline{\epsilon}}) \right) + \overrightarrow{grad}^T \left(\overrightarrow{div} (\overline{\overline{\epsilon}}) \right) - \overrightarrow{grad} \left(\overrightarrow{grad} (tr (\overline{\overline{\epsilon}})) \right) - \overline{\overline{\Delta}} (\overline{\overline{\epsilon}}) = \overline{\overline{0}}$$

Prenons en compte la loi de comportement (9.9) :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{(1+\nu)}{E} \overline{\overline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} tr (\overline{\overline{\sigma}}) \overline{\overline{I}} \Rightarrow tr (\overline{\overline{\epsilon}}) = \frac{1-2\nu}{E} tr (\overline{\overline{\sigma}}) \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\Delta}} (\overline{\overline{\epsilon}}) = \frac{(1+\nu)}{E} \overline{\overline{\Delta}} \overline{\overline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \Delta tr (\overline{\overline{\sigma}}) \overline{\overline{I}}$$

posons $\Sigma = tr (\overline{\overline{\sigma}})$, alors :

$$\overrightarrow{grad} \left(\overrightarrow{div} \left((1+\mu) \overline{\overline{\sigma}} - \nu \Sigma \overline{\overline{I}} \right) \right) + \overrightarrow{grad}^T \left(\overrightarrow{div} \left((1+\mu) \overline{\overline{\sigma}} - \nu \Sigma \overline{\overline{I}} \right) \right) - \overrightarrow{grad} \left(\overrightarrow{grad} ((1-2\nu) \Sigma) \right) - \left((1+\nu) \overline{\overline{\Delta}} \overline{\overline{\sigma}} - \nu \Delta \Sigma \overline{\overline{I}} \right) = \overline{\overline{0}}$$

ou encore :

$$(1 + \nu) \left(\overline{\overline{\text{grad} \text{div} \vec{\sigma}}} + \overline{\overline{\text{grad}^T \text{div} \vec{\sigma}}} - \overline{\overline{\Delta \vec{\sigma}}} \right) - \nu \left[\overline{\overline{\text{grad} (\text{grad} \Sigma)} + \overline{\overline{\text{grad}^T (\text{grad} \Sigma)}} \right] - (1 - 2\nu) \overline{\overline{\text{grad} (\text{grad} \Sigma)} + \nu \Delta \Sigma \vec{I} = \vec{0}$$

par conséquent :

$$\left(\overline{\overline{\text{grad} \text{div} \vec{\sigma}}} + \overline{\overline{\text{grad}^T \text{div} \vec{\sigma}}} - \overline{\overline{\Delta \vec{\sigma}}} \right) - \frac{1}{(1 + \nu)} \left(\overline{\overline{\text{grad} (\text{grad} \Sigma)} - \nu \Delta \Sigma \vec{I} \right) = \vec{0} \quad (9.14)$$

Maintenant, prenons la divergence de l'équation 9.12 :

$$\mu \text{div} \overline{\overline{\Delta \vec{u}}} + (\mu + \lambda) \overline{\overline{\text{div} \text{grad} \text{div} \vec{u}}} + \text{div} \overline{\overline{\vec{f}_v}} = 0$$

comme $\text{div} \overline{\overline{\text{grad} f}} = \Delta f$ et que $\overline{\overline{\Delta \vec{u}}} = \Delta \text{div} \vec{u}$, et que, d'autre part $\text{div} \vec{u} = \text{tr}(\vec{\varepsilon}) = \theta = \frac{1-2\nu}{E} \Sigma$, il vient :

$$(2\mu + \lambda) \frac{1-2\nu}{E} \Delta \Sigma + \text{div} \overline{\overline{\vec{f}_v}} = \vec{0} \quad (9.15)$$

Finalement, compte tenu des relations, il reste :

$$\frac{2\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \Delta \Sigma + \text{div} \overline{\overline{\vec{f}_v}} = \vec{0}$$

$$\frac{1-\nu}{1+\nu} \Delta \Sigma + \text{div} \overline{\overline{\vec{f}_v}} = \vec{0} \quad (9.16)$$

Prenons maintenant en compte l'équation d'équilibre local 9.2, et substituons dans l'équation 9.14, il vient :

$$\overline{\overline{\Delta \vec{\sigma}}} + \frac{1}{1+\nu} \overline{\overline{\text{grad} \text{grad} \Sigma}} + \overline{\overline{\text{grad} \vec{f}_v}} + \overline{\overline{\text{grad}^T \vec{f}_v}} + \frac{\nu}{1-\nu} \text{div} \overline{\overline{\vec{f}_v}} \vec{I} = \vec{0} \quad (9.17)$$

Ce sont les 6 équations de BELTRAMI.

9.3.3 Cas des forces de volume uniformes

Dans le cas où les forces de volume sont uniformes (poids volumique dans le cas d'un matériau homogène), il reste :

$$\overline{\overline{\Delta \vec{\sigma}}} + \frac{1}{1+\nu} \overline{\overline{\text{grad} \text{grad} \Sigma}} = \vec{0}$$

Si l'on prend le Laplacien de cette dernière équation :

$$\overline{\overline{\Delta \Delta \vec{\sigma}}} + \frac{1}{1+\nu} \overline{\overline{\text{grad} \text{grad} \Delta \Sigma}} = \vec{0}$$

et comme $\text{div} \overline{\overline{\vec{f}_v}} = 0$, il reste :

$$\overline{\overline{\Delta^2 \vec{\sigma}}} = \vec{0}$$

\Rightarrow le tenseur des contraintes est "bi-harmonique". D'autre part l'équation 9.16 devient $\Delta \Sigma = 0$: la trace des contraintes est une fonction harmonique.

9.3.4 Champ de contrainte statiquement admissible

On appelle "champ de contrainte statiquement admissible" (champ SA) tout champ de contrainte virtuel $\{\overline{\overline{\sigma^*}}\}$ continu et dérivable (au moins par morceau) et satisfaisant :

1. les équations de l'équilibre local :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{div}}\overline{\overline{\sigma^*}} + \overrightarrow{f_v} = \overrightarrow{0}} \quad (9.18)$$

2. les conditions aux limites du solide :

$$\overline{T^*}(P) = \overline{\overline{\sigma^*}}(P) \cdot \overline{n}(P) = \overline{f_s}(P) \quad \forall P \in \{\partial S_f\} \quad \text{et} \quad \overline{n} \perp \{\partial S\}$$

De tels champs sont utilisés dans les méthodes approchées de calcul.

NOTE : Le champ de contrainte "réel" (solution exacte des équations de BELTRAMI) est statiquement admissible.

9.4 Unicité de la solution d'un problème d'élasticité

9.4.1 Principe de superposition

Constatons que les équations de NAVIER sont des équations linéaires aux dérivées partielles, du second ordre et à coefficients constants. \Rightarrow Si un chargement $\{F_1\}$ appliqué à un solide (D) conduit à une solution $\{\overline{\overline{\sigma_1}}, \overline{\overline{\varepsilon_1}}, \overline{\overline{u_1}}\}$ et qu'un autre chargement $\{F_2\}$ appliqué au solide (D) conduit à une solution $\{\overline{\overline{\sigma_2}}, \overline{\overline{\varepsilon_2}}, \overline{\overline{u_2}}\}$, alors le chargement $\{F_1 + F_2\}$ admet $\{\overline{\overline{\sigma_1}} + \overline{\overline{\sigma_2}}, \overline{\overline{\varepsilon_1}} + \overline{\overline{\varepsilon_2}}, \overline{\overline{u_1}} + \overline{\overline{u_2}}\}$ comme solution.

9.4.2 Unicité de la solution

On suppose le solide (D) exempt de contraintes au repos (état initial) et on lui applique un chargement $\{F\}$. Supposons que la résolution du problème, via les équations de BELTRAMI ou de NAVIER conduisent à dégager deux solutions différentes $\{\overline{\overline{\sigma_1}}, \overline{\overline{\varepsilon_1}}, \overline{\overline{u_1}}\}$ et $\{\overline{\overline{\sigma_2}}, \overline{\overline{\varepsilon_2}}, \overline{\overline{u_2}}\}$. Le principe de superposition (ci-dessus) permet de conclure que la différence des deux champs $\{\overline{\overline{\sigma_1}} - \overline{\overline{\sigma_2}}, \overline{\overline{\varepsilon_1}} - \overline{\overline{\varepsilon_2}}, \overline{\overline{u_1}} - \overline{\overline{u_2}}\}$ est solution du problème alors même que le solide (D) n'est soumis à aucune force.

Le théorème de l'énergie permet d'affirmer qu'en l'absence de forces appliquées, le travail de celle-ci étant nul, l'énergie élastique emmagasinée par le solide est également nulle et donc :

$$W_e = \int_S \frac{1}{2} [\overline{\overline{\sigma_1}} - \overline{\overline{\sigma_2}}] : \overline{\overline{S}} [\overline{\overline{\sigma_1}} - \overline{\overline{\sigma_2}}] dv = 0$$

Or W_e est une forme quadratique définie et positive et ne peut s'annuler que si $\overline{\overline{\sigma_1}} - \overline{\overline{\sigma_2}} = \overline{\overline{0}} \Rightarrow$ c'est donc que les deux solutions trouvées ne constituent qu'une seule et unique solution.

9.4.3 Champ CA et champ SA associés

Si pour un problème d'élasticité et par la loi de comportement, on peut associer un champ de déplacement $\{\overline{\overline{u^*}}\}$ cinématiquement admissible à un champ de contrainte $\{\overline{\overline{\sigma^*}}\}$ statiquement admissible, alors les champs $\{\overline{\overline{u^*}}, \overline{\overline{\sigma^*}}\}$ constituent la solution unique du problème.

9.5 Méthode de RITZ

La méthode de RITZ constitue une méthode approchée dans la recherche d'une solution à un problème de mécanique des milieux continus.

9.5.1 Théorème

En statique, on introduit la fonctionnelle "Potentiel" (nommé potentiel ou énergie potentielle) notée γ et composée comme suit :

$$\boxed{\gamma(u^*) = V_e(u^*) + V_f(u^*)} \quad (9.19)$$

Dans laquelle :

- $\{u^*\}$ est un champ de déplacement cinématiquement admissible (CA).
- V_e est le potentiel élastique associée à ce champ de déplacement CA :

$$V_e(u^*) = \int_S \frac{1}{2} \overline{\overline{\overline{\varepsilon^*}}} : \overline{\overline{\overline{C\varepsilon^*}}} . dv = \int_S \frac{1}{2} \overline{\overline{\overline{\varepsilon^*}}} : \overline{\overline{\overline{C\varepsilon^*}}} . dv$$

- V_f est le potentiel des forces extérieures :

$$V_f(u^*) = - \left(\underbrace{\int_S \overline{\overline{\overline{f_v}}} \cdot \overline{\overline{\overline{u^*}}} . dv}_{\text{forces volumiques}} + \underbrace{\int_{\partial S} \overline{\overline{\overline{f_s}}} \cdot \overline{\overline{\overline{u^*}}} . dS}_{\text{forces surfaciques}} \right)$$

Supposons que $\{u^*\}$ soit égal au champ de déplacement réel à une perturbation cinématiquement admissible $\{\delta u\}$ près :

$$\boxed{\{u^*\} = \{u\} + \{\delta u\} \text{ avec } \{\delta u\} \text{ CA}} \quad (9.20)$$

On peut établir le tenseur des déformations dérivant de $\{u^*\}$ Par linéarité :

$$\boxed{\overline{\overline{\overline{\varepsilon^*}}} = \underbrace{\overline{\overline{\overline{\varepsilon}}}}_{\text{champ de dformation rel}} + \underbrace{\overline{\overline{\overline{\delta\varepsilon}}}}_{\text{champ des perturbations de dformation}}} \quad (9.21)$$

Alors, par symétrie :

$$\boxed{V_e(u^*) = \int_S \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\overline{\delta\varepsilon}}} : \overline{\overline{\overline{C\varepsilon}}} + 2\overline{\overline{\overline{\delta\varepsilon}}} : \underbrace{\overline{\overline{\overline{C\varepsilon}}}}_{\overline{\overline{\overline{\sigma}}}} + \overline{\overline{\overline{\varepsilon}}} : \overline{\overline{\overline{C\varepsilon}}} \right) dv} \quad (9.22)$$

D'autre part :

$$\boxed{V_f(u^*) = - \left(\int_S \overline{\overline{\overline{f_v}}} \cdot \overline{\overline{\overline{\delta u}}} . dv + \int_{\partial S} \overline{\overline{\overline{f_s}}} \cdot \overline{\overline{\overline{\delta u}}} . dS \right) - \left(\int_S \overline{\overline{\overline{f_v}}} \cdot \overline{\overline{\overline{u}}} . dv + \int_{\partial S} \overline{\overline{\overline{f_s}}} \cdot \overline{\overline{\overline{u}}} . dS \right)} \quad (9.23)$$

Par sommation et regroupement :

$$\begin{aligned} \gamma(u^*) &= \left[\int_S \frac{1}{2} \overline{\overline{\overline{\varepsilon}}} : \overline{\overline{\overline{C\varepsilon}}} - \underbrace{\left(\int_S \overline{\overline{\overline{f_v}}} \cdot \overline{\overline{\overline{u}}} . dv + \int_{\partial S} \overline{\overline{\overline{f_s}}} \cdot \overline{\overline{\overline{u}}} . dS \right)}_{\gamma(u)} \right] \\ &- \underbrace{\left[- \int_S \overline{\overline{\overline{\sigma}}} : \overline{\overline{\overline{\delta\varepsilon}}} . dv + \left(\int_S \overline{\overline{\overline{f_v}}} \cdot \overline{\overline{\overline{\delta u}}} . dv + \int_{\partial S} \overline{\overline{\overline{f_s}}} \cdot \overline{\overline{\overline{\delta u}}} . dS \right) \right]}_{P_f^* + P_e^* = 0} + \underbrace{\int_S \frac{1}{2} \overline{\overline{\overline{\delta\varepsilon}}} : \overline{\overline{\overline{C\varepsilon}}}}_{\text{forme bilinéaire symétrique} \geq 0} \end{aligned} \quad (9.24)$$

- Le 1er terme est le potentiel $\gamma(u)$ calculée pour la valeur du champ réel de déplacement.
- Le second terme est nul en vertu du principe des puissances virtuelles.
- Le troisième terme est une forme bilinéaire du champ de perturbation des déformations (et donc des déplacements dans l'hypothèse des petites perturbations). Cette forme bilinéaire est définie, symétrique et positive.

Par conséquent :

$$\boxed{\gamma(u^*) \geq \gamma(u) \quad \forall u^* \quad CA} \tag{9.25}$$

Énoncé de RITZ : Parmi l'ensemble de tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles, le champ de déplacement "réel" (solution du problème d'élasticité) minimise le Potentiel du système solide.

Énoncé 2 : Dans un ensemble restreint (une "famille") de champs de déplacements cinématiquement admissibles, le "meilleur" champ de déplacement minimise le Potentiel.

Rappel : Bien différencier "potentiel élastique" et "énergie élastique", d'une part, et "travail des forces extérieures" et "potentiel des forces extérieures" d'autre part. Le théorème de RITZ s'exprime en terme de potentiels.

Si l'on prend l'exemple d'un ressort de rigidité k soumis à l'action d'une force F et que l'on cherche son allongement u .

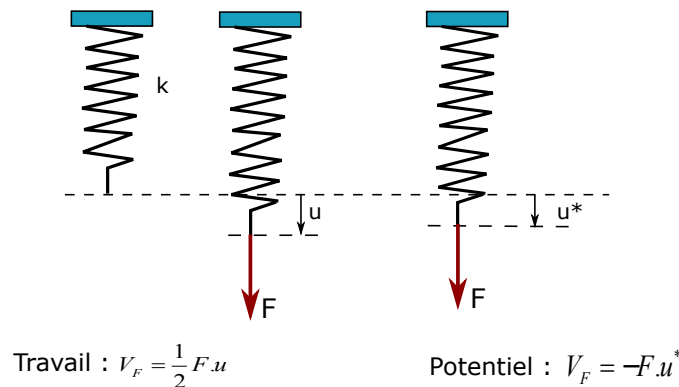


FIGURE 9.3 – Travail versus potentiel d'une force - cas du ressort.

Théorème de l'énergie mécanique :

Énergie élastique du ressort : $W_e = \frac{1}{2}ku^2$

Travail de la force : $T_F = \frac{1}{2}F \cdot u$

Identification : $W_e = T_F \Rightarrow u = \frac{F}{k}$

Méthode de RITZ :

Potentiel élastique du ressort : $V_e = \frac{1}{2}ku^{*2}$

Potentiel de la force : $V_F = -F \cdot u^*$

Potentiel du système : $\gamma = \frac{1}{2}ku^{*2} - F \cdot u^*$

Minimisation du potentiel : $\left. \frac{d\gamma}{du^*} \right|_{u^*=u_{reel}} = 0 \Rightarrow ku - F = 0 \Rightarrow u = \frac{F}{k}$

9.5.2 Application

Ce théorème est à la base d'une méthode de recherche de solutions approchées des problèmes d'élasticité. Elle s'inscrit dans une logique de recherche du champ de déplacement, celui-ci étant

candidat dans une famille de champs de déplacement cinématiquement admissibles.

Il est ainsi fréquent de chercher le champ de déplacement comme combinaison linéaire¹ de fonctions cinématiquement admissibles et indépendantes choisies dans une classe de fonctions (par exemple des polynômes ou des fonctions harmoniques) :

$$\vec{u}^*(M) = \sum_{i=1}^n Z_i \cdot \vec{\varphi}_i(x, y, z) \quad \text{avec } \varphi_i \text{ CA} \quad (9.26)$$

Les paramètres scalaires Z_i sont des amplitudes (proportionnelles à des déplacements) tandis que les fonctions $\vec{\varphi}_i$ sont des "fonctions de forme" judicieusement choisies. Du fait de la substitution de la fonction \vec{u}^* par la combinaison linéaire de fonctions connues, la fonctionnelle $\gamma(\vec{u}^*)$ est remplacée, sur le plan mathématique, par une fonction à plusieurs variables $\tilde{\gamma}(Z_i)$.

Le problème pratique de minimisation de la fonctionnelle γ est ainsi ramené à la recherche des zéros des dérivées partielles de la fonction $\tilde{\gamma}$. La meilleure solution (compte tenu du choix fait a priori des fonctions de forme) est ainsi obtenue en résolvant le jeu d'équations :

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{dZ_i} \quad \forall j \quad (9.27)$$

En élasticité linéaire, sous la condition des petites perturbations, ces équations sont linéaires et forment un système défini, positif et symétrique². On obtient :

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & & & \\ K_{12} & K_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & K_{n,n-1} & \\ & & & K_{n,n-1} & K_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (9.28)$$

Ce système $[K][Z] = [F]$ est composé d'une "matrice de rigidité" $[K]$, du "vecteur déplacement" $[Z]$ dont les composantes sont les amplitudes Z_i encore nommées "degrés de liberté" et, enfin, le vecteur des "forces généralisés" $[F]$ qui ne dépend que du chargement appliqué à l'ossature et du choix des fonctions de forme.

A partir de là :

- La colonne des inconnues $[Z_i]$ est calculée en inversant le système linéaire : $[Z] = [K]^{-1}[F]$
- On en déduit ensuite le champ de déplacement approché : $\vec{u}^*(M) = \sum_{i=1}^n Z_i \cdot \vec{\varphi}_i(M)$
- De là on tire le champ de déformation approché : $\overline{\overline{\varepsilon}}^* = \frac{1}{2} \left[\overline{\overline{\text{grad}u}}^* + \overline{\overline{\text{grad}^T u}}^* \right]$
- Et finalement les contraintes : $\overline{\overline{\sigma}}^* = 2\mu\overline{\overline{\varepsilon}}^* + \lambda\theta^*\overline{\overline{I}}$
- Si le champ de contrainte obtenu est statiquement admissible et satisfait les conditions aux limites, l'ensemble $\{\vec{u}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*, \overline{\overline{\varepsilon}}^*\}$ constitue la solution "réelle" du problème d'élasticité sinon il ne s'agit que d'une approximation.

9.5.3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à décomposer le solide étudié en petits éléments (finis) de forme choisie (en 3D : tétraèdres, parallélépipèdes ; en 2D : triangles, rectangles, quadrilatères...)

1. Naturellement il n'est pas interdit d'envisager d'autres types de combinaison.
2. En grands déplacements, le système peut ne pas être défini pour certaines configurations de chargement conduisant à une instabilité de forme.

étant entendu que, sur chacun d'eux les motifs de déplacements sont connus.

Sur chaque élément, le champ de déplacement est donné par les amplitudes des déplacements de points particuliers appelés "nœuds" (par exemple, mais pas seulement, les sommets). Chaque élément possède donc sa propre matrice de rigidité (matrice élémentaire).

La continuité du solide et du champ de déplacement est obtenue par la mise en commun des nœuds des éléments adjacents. Les amplitudes de déplacement de l'ensemble des nœuds constituent les "degrés de liberté" du système. Formellement, cette mise en commun³ conduit à "l'assemblage matriciel" d'où résulte la "matrice de rigidité globale" du solide ainsi que le vecteur des forces généralisées.

Cette méthode de discrétisation d'un solide en petits éléments se prête au calcul automatique sur ordinateur. Les programmes de calcul permettent ainsi de modéliser le problème, se chargent du "maillage", effectuent l'assemblage matriciel, résolvent le système linéaire et permettent l'exploitation des résultats sous forme de graphes, tables, animations diverses.

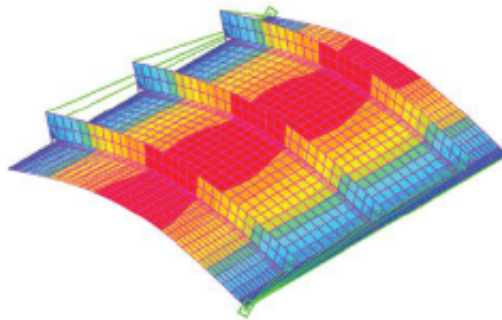


FIGURE 9.4 – Maillage d'une coque.

Cette méthode trouve des développements importants en dehors du champ de l'élasticité ou même du cadre strict de la mécanique. On trouve ainsi des codes permettant de traiter des problèmes de thermique (conduction), de diffusion, de mécanique des fluides, d'électromagnétisme, et même de phénomènes couplés.

9.6 Élasticité bidimensionnelle

L'élasticité bidimensionnelle concerne des solides de géométrie particulière dans des chargements particuliers ; on montre alors que le tenseur des contraintes (ou celui des déformations) ne comporte plus que quatre composantes dépendantes de deux variables de l'espace.

Dans une telle configuration, non seulement le problème est considérablement simplifié du point de vue des mathématiques, mais encore bénéficie-t-il de méthodes de résolution spécifiques.

Il existe deux cas d'élasticité dite plane :

1. l'état de déformation plane concerne les corps prismatiques dont la longueur (selon z axe du prisme) est infiniment plus grand que les dimensions transversales de la section droite. Ce prisme est uniquement soumis à des efforts latéraux agissant perpendiculairement à l'axe du

3. Les conditions d'appui sont également prises en compte.

prisme et uniformément sur toute la longueur. Dans ce cas, on convient que le déplacement axial u_z est nul et qu'il n'y a pas de déformation axiale le long de cet axe ni de distorsion des angles droits bâtis sur cet axe et toute direction orthogonale. Ainsi, en coordonnées cartésiennes, $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$. Cette fois c'est le tenseur des déformations qui ne comporte plus que trois composantes non-nulles $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$. A noter que, du fait du coefficient de Poisson, la contrainte normale axiale n'est pas nulle mais vaut $\sigma_{zz} = +\nu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$

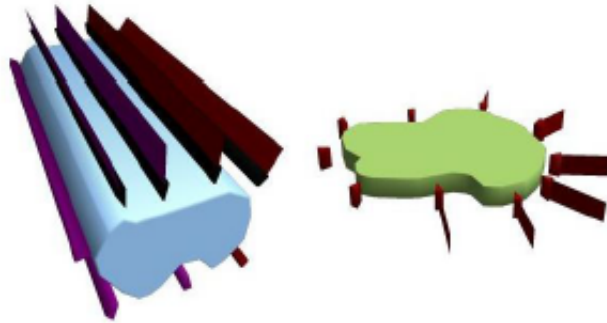


FIGURE 9.5 – États plans de déformation et de contrainte.

2. l'état de contrainte plan concerne les plaques minces chargées dans leur plan (il n'y a donc pas de flexion comme cela serait le cas pour un plancher par exemple). Les surfaces parallèles délimitant la plaque ne sont pas chargées. Si on note \vec{z} l'axe perpendiculaire à la plaque on considère que les grandeurs ne dépendent pas de la coordonnée z . De plus le vecteur contrainte $\vec{\Phi}_Z = \vec{\sigma} \cdot \vec{z}$ est uniformément nul. Le tenseur des contraintes ne comporte donc plus que 3 composantes non-nulles, par exemple $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ en coordonnées cartésiennes. A noter que, du fait du coefficient de Poisson, la déformation transversale ε_{zz} n'est pas nulle mais vaut $\varepsilon_{zz} = -\nu \cdot (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$ localement.

9.6.1 Forme des tenseurs - tenseurs réduits

Bien que chaque tenseur ne comporte que trois composantes indépendante, la forme des tenseurs change avec le type d'élasticité plane.

État plan de contrainte

En coordonnées cartésiennes, le tenseur des contraintes prend la forme :

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $\overline{\overline{\sigma}}$ la partie plane du tenseur des contraintes.

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Du fait de la loi de HOOKE, le tenseur des déformations (non-plan) est :

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Du fait du coefficient de Poisson, la déformation axiale selon l'axe \vec{e}_3 n'est pas nulle mais vaut :

$$\varepsilon_{33} = -\nu.(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

On pose $\overline{\overline{\varepsilon}}$ la partie plane du tenseur des déformations.

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{12}(x_1, x_2) \\ \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

État plan de déformation

En coordonnées cartésiennes, le tenseur des déformations prend la forme :

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $\overline{\overline{\varepsilon}}$ la partie plane du tenseur des déformations.

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x_1, x_2) & \varepsilon_{12}(x_1, x_2) \\ \varepsilon_{12}(x_1, x_2) & \varepsilon_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Du fait de la loi de HOOKE, le tenseur des contraintes (non plan) est :

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Du fait du coefficient de Poisson, la contrainte normale selon l'axe \vec{e}_3 n'est pas nulle mais vaut :

$$\sigma_{33} = +\nu.(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

On pose $\overline{\overline{\sigma}}$ la partie plane du tenseur des contraintes :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) & \sigma_{12}(x_1, x_2) \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) & \sigma_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

9.6.2 Équation de compatibilité

Rappelons les équations de compatibilité établies en 3D et en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) = 0 \end{cases}$$

Compte tenu de ce que $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$ et que $\frac{\partial}{\partial x_3} \equiv 0$, en élasticité plane, il reste :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \end{cases}$$

— En état plan de déformation le terme ε_{33} est également nul de sorte qu'il ne reste qu'une seule équation :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0} \quad (9.29)$$

- En état plan de contrainte la fonction $\varepsilon_{33}(x_1, x_2)$ a ses trois dérivées secondes nulles ; c'est donc que c'est une fonction linéaire de ses variables : $\varepsilon_{33}(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$. Cette condition étant difficilement satisfaite, les états de contrainte plan constituent une approximation de l'état de contrainte siégeant dans les plaques chargées dans leur plan.

9.6.3 Trace des tenseurs

Au besoin, on notera que $tr(\bar{\bar{I}}) = 2$.

État plan de contrainte

$$\Sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \tilde{\Sigma}$$

$$\theta = (1 - \nu)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = (1 - \nu)\tilde{\theta}$$

État plan de déformation

$$\Sigma = (1 + \nu)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = (1 + \nu)\tilde{\Sigma}$$

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \tilde{\theta}$$

9.6.4 Équilibre

État plan de contrainte

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2^v = 0 \\ f_3^v = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{div} \bar{\bar{\sigma}} + \bar{\bar{f}}_v = \bar{\bar{0}}$$

Au "bord" du solide (surface latérale (∂S)) :

$$\overrightarrow{T(P, \vec{n})} = \bar{\bar{\sigma}}(P) \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1s} \\ f_{2s} \\ f_{3s} \end{pmatrix}$$

Cela confirme bien qu'il ne peut y avoir de force agissant selon \vec{e}_3

État plan de déformation

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2^v = 0 \\ f_3^v = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{div} \bar{\bar{\sigma}} + \bar{\bar{f}}_v = \bar{\bar{0}}$$

Au "bord" du solide (surface latérale (∂S)) :

$$\overrightarrow{T(P, \vec{n})} = \bar{\bar{\sigma}}(P) \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1s} \\ f_{2s} \\ f_{3s} \end{pmatrix}$$

Cela confirme bien qu'il ne peut y avoir de force axiale.

9.6.5 Relation contraintes - déformations

État plan de contrainte

La trace du tenseur des contraintes vaut $\Sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22}$, en appliquant la loi de HOOKE :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}}{E} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}}{E} \\ \varepsilon_{12} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{12} \end{cases}$$

État plan de déformation

La trace du tenseur des contraintes vaut $\Sigma = (1 + \nu)(\sigma_{11} + \sigma_{22})$; en appliquant la loi de HOOKE :

$$\Sigma = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (1 + \nu) (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1 - \nu^2}{E} \right] [\sigma_{11} - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{22}]$$

État plan de contrainte

On pose :

$$E = E' \frac{1+2\nu'}{(1+\nu')^2} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\nu'}{1+\nu'}$$

loi de comportement "réduite" :

$$\bar{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left[\bar{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-\nu} \tilde{\theta} \bar{I} \right]$$

ou :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \tilde{\Sigma} \bar{I}$$

notation de VOIGT :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

État plan de déformation

de même :

$$\varepsilon_{22} = \left[\frac{1-\nu^2}{E} \right] \left[\sigma_{22} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{11} \right]$$

et enfin :

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} = \left[\frac{1-\nu^2}{E} \right] \left[\frac{1}{1-\nu} \right] \sigma_{12}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{12} = \left[\frac{1-\nu^2}{E} \right] \left[1 + \frac{1}{1-\nu} \right] \sigma_{12}$$

On pose :

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \text{et} \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$$

alors, en état plan de déformation :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - \nu' \sigma_{22}}{E'} \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22} - \nu' \sigma_{11}}{E'} \\ \varepsilon_{12} = \frac{(1+\nu')}{E'} \sigma_{12} \end{cases}$$

loi de comportement "réduite" :⁴

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \left[\bar{\sigma} - \nu \tilde{\Sigma} \bar{I} \right]$$

ou :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu'}{E'} \bar{\sigma} - \frac{\nu'}{E'} \tilde{\Sigma} \bar{I}$$

notation de VOIGT :

9.6.6 Énergie volumique

Dans les deux cas :

$$W_e = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \cdot \gamma_{12}) \tag{9.30}$$

9.6.7 Équations de BELTRAMI

Nous allons établir les équations de Beltrami en état plan de contrainte. La transposition à l'état plan de déformation s'effectuera simplement en remplaçant E par $E' = E/1 - \nu^2$ et ν par $\nu' = \nu/1 - \nu$

4. Noter que $\tilde{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

État plan de contrainte

Partons de l'équation de compatibilité en 2D et en coordonnées cartésiennes (9.29) et remplaçons les déformations par les contraintes compte tenu de la loi de comportement :

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} [\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}] + \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} [\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}] - 2 \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \sigma_{12} = 0$$

soit :

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - (1 + \nu) \left[\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right] = 0 \quad \text{en transposant en déformations planes :}$$

$$\Delta \tilde{\Sigma} + (1 + \nu') \operatorname{div} \vec{f}_v = 0$$

or : $\operatorname{div} \vec{\sigma} + \vec{f}_v = \vec{0}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + f_1^v = 0 & \text{x } \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2^v = 0 & \text{x } \frac{\partial}{\partial x_2} \end{cases}$$

en sommant :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1 \partial x_2} + \operatorname{div} \vec{f}_v = 0$$

finalemt :

$$\Delta \tilde{\Sigma} + (1 + \nu) \operatorname{div} \vec{f}_v = 0 \quad (9.31)$$

soit :

$$\Delta \tilde{\Sigma} + \frac{1}{1 - \nu} \operatorname{div} \vec{f}_v = 0 \quad (9.32)$$

9.6.8 Fonction de AIRY**Les contraintes dérivent d'une fonction unique**

Il s'agit de mettre en évidence une fonction unique de laquelle le champ de contrainte dérive. Pour cela repartons des équations d'équilibre qui sont les mêmes dans les deux états d'élasticité plane.

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} + \vec{f}_v = \vec{0}$$

Supposons, ce qui constitue quand même une situation très courante, que les forces de volumes dérivent d'un potentiel⁵ :

$$\vec{f}_v = \overrightarrow{\operatorname{grad}} V \Leftrightarrow f_1^v = \partial V / \partial x_1 \quad \text{et} \quad f_2^v = \partial V / \partial x_2$$

Les équations deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial(\sigma_{11} + V)}{\partial x_1} = -\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\sigma_{22} + V)}{\partial x_2} = -\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} \end{cases}$$

Si on se souvient du théorème de Cauchy⁶, en introduisant deux fonctions φ et ψ , alors on peut poser :

$$\begin{cases} \sigma_{11} + V = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \sigma_{22} + V = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \sigma_{12} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{cases}$$

5. Par exemple, si la gravité agit selon l'axe \vec{e}_1 alors : $\vec{f}_v = \rho g \vec{e}_1$, le potentiel correspondant au poids volumique est $V = \rho g x_1$.

6. $\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_1}$ (dans une double dérivation, l'ordre de dérivation n'importe pas si la fonction h est suffisamment "lisse")

Comme, manifestement $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$, on peut de nouveau introduire une fonction Φ telle que :

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$$

Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} + V = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \\ \sigma_{22} + V = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \end{array} \right. \quad (9.33)$$

Propriété de la fonction d’AIRY

— cas où les forces de volumes dérivent d’un potentiel

État plan de contrainte

Équation de BELTRAMI :

$$\Delta \tilde{\Sigma} + (1 + \nu) \operatorname{div} \vec{f}_v = 0$$

avec :

$$\tilde{\Sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \Delta \Phi - 2V$$

donc⁷ :

$$\Delta(\Delta \Phi - 2V) + (1 + \nu) \Delta V = 0$$

par conséquent :

$$\boxed{\Delta^2 \Phi + (1 - \nu) \Delta V = 0} \quad (9.34)$$

État plan de déformation

Équation de BELTRAMI :

$$\Delta \tilde{\Sigma} + (1 + \nu') \operatorname{div} \vec{f}_v = 0$$

transposition en déformations planes :

$$\Delta^2 \Phi + (1 - \nu') \Delta V = 0$$

c’est-à-dire :

$$\boxed{\Delta^2 \Phi + \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \Delta V = 0} \quad (9.35)$$

— cas où les forces de volume sont harmoniques, uniformes ou nulles

Alors : $\Delta V = 0$ Pour les deux cas d’élasticité plane, il reste :

$$\boxed{\Delta^2 \Phi = 0} \quad (9.36)$$

⇒ La fonction de AIRY est bi-harmonique.

Formulation d’un problème d’élasticité plane

Chercher une fonction $\Phi(x_1, x_2)$ telle que (si les forces de volume sont harmoniques) $\Delta^2 \Phi = 0$ et dont les contraintes dérivent par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - V \\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - V \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} - V \end{array} \right. \quad (9.37)$$

Le champ de contrainte satisfait alors automatiquement les équations d’équilibre et les équations de compatibilité. Il doit aussi vérifier les conditions aux limites en contrainte : $\overline{T(P, \vec{n})} = \vec{f}_s$ sur ∂S_f . Les déplacements dérivant des contraintes doivent, quant à eux, vérifier les conditions en déplacement $\vec{u} = \vec{u}_0$ sur ∂S_f .

⇒ En pratique la recherche d’une telle fonction Φ est aussi compliquée que la recherche directe du

7. $\operatorname{div} \vec{\operatorname{grad}} h = \Delta h$

champ de contrainte (équation aux dérivées partielles du 4^{me} ordre); aussi cherche-t-on souvent une solution approchée sous la forme d'un polynôme

$$\Phi = \sum \alpha_i x_1^n x_2^n \quad (9.38)$$

dont l'ordre est de 4 au maximum avec des coefficients judicieusement choisis de sorte à exploiter les symétries éventuelles et les conditions limites en contraintes. On trouve ainsi des applications intéressantes notamment en théorie des poutres pour la mise en évidence d'effets du second ordre par rapport aux hypothèses classiques de NAVIER-BERNOULLI.

La solution obtenue par ce moyen est statiquement admissible mais pas souvent cinématiquement admissible.

9.7 Élasticité axisymétrique

Un problème d'élasticité est dit axisymétrique lorsque deux conditions sont réunies.

1. la forme du solide étudié présente une symétrie de révolution autour d'un axe (z);
2. le chargement et les conditions aux limites sont également de révolution autour de ce même axe.

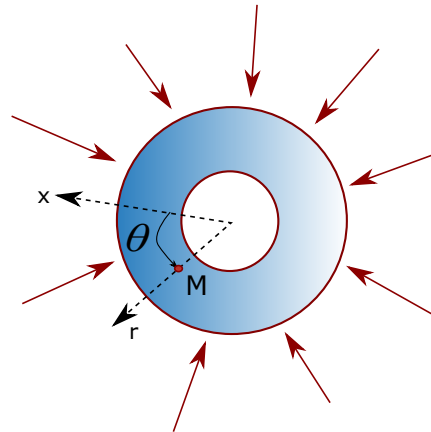


FIGURE 9.6 – Exemple de problème axisymétrique.

Dans ce cas, la solution est aussi axisymétrique. Il est alors avantageux d'employer un système de coordonnées cylindriques autour de l'axe d'axisymétrie. Toutes les grandeurs sont donc indépendantes de l'angle polaire θ . On est ainsi ramené à un problème à deux variables r, z .

L'axisymétrie peut aussi se combiner avec un état plan d'élasticité, auquel cas les grandeurs ne dépendent plus que de r . C'est le cas très particulier du tube infiniment long ou de la plaque annulaire chargée radialement.

9.8 Exercice

9.8.1 Enoncé

Soit le massif rectangulaire de grande longueur représenté sur la figure suivante : On pose plusieurs hypothèses :

- Comportement élastique linéaire, de paramètres E et ν
- Face supérieure soumise à une pression uniforme p
- Face intérieure en appui glissant et non-frottant, fixée sur l'axe (O, \vec{e}_3)

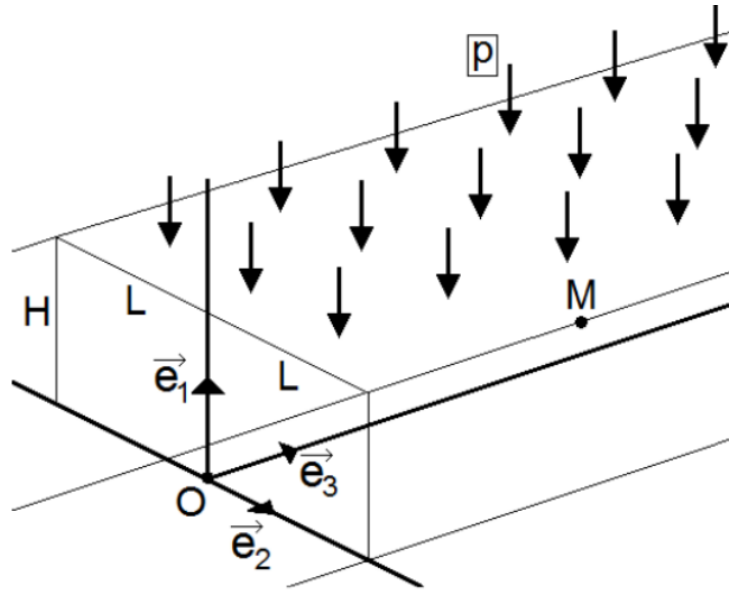


FIGURE 9.7 – problème d'élasticité.

- Forces de volumes négligeables.
 - Hypothèses des petites perturbations.
 - On se place dans la zone centrale du massif pour se prémunir des effets de bord. Champ de déplacement donne par $\vec{U} = (A.X_1 + C.X_2) \vec{e}_1 + (-C.X_1 + B.X_2) \vec{e}_2$
1. Représenter la section du massif contenant le point M , ainsi que les conditions aux limites sur cette section.
 2. Calculer le tenseur des déformations $\bar{\bar{\epsilon}}$, et donner ses valeurs principales et ses directions principales. De quel type de déformation s'agit-il ?
 3. Exprimer analytiquement le tenseur de cauchy $\bar{\bar{\sigma}}$ (utiliser les coefficients de Lamé pour simplifier les notations).
 4. En utilisant les conditions aux limites en contraintes, calculer les expressions des paramètres A et B . En utilisant les conditions aux limites en déplacement, calculer C .
 5. On pose $E = 210000MPa$ et $\nu = 0.3$ (Massif en acier). Les dimensions de la section sont $L = 0.2m$ et $H = 0.15m$, et le chargement vaut $p = 500MPa$. Calculer le vecteur déplacement du point M . Tracer la déformée de la section.

9.8.2 Solution

- La section du massif contenant le point M est un rectangle. Il est soumis aux limites suivantes :
 - Face supérieure : pression uniforme égale à p .
 - Faces latérales : pression uniforme égale à 0.
 - Face inférieure : déplacement vertical bloqué, déplacement horizontal bloqué au point central
- Le champ de déplacement est donné par l'expression :

$$\vec{U} = \begin{cases} A.X_1 + C.X_2 \\ -C.X_1 + B.X_2 \\ 0 \end{cases}$$

Il s'agit manifestement d'un mouvement plan. Le tenseur des déformations linéarisées se calcul par :

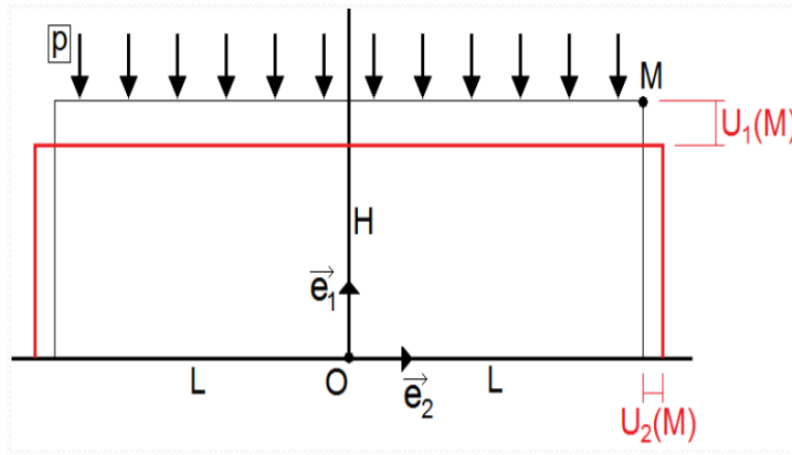


FIGURE 9.8 – Section du Massif.

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \bar{U} + \left(\overrightarrow{\text{grad}} \bar{U} \right)^T \right)$$

Or :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \bar{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial X_1} & \frac{\partial U_1}{\partial X_2} & \frac{\partial U_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial X_1} & \frac{\partial U_2}{\partial X_2} & \frac{\partial U_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial X_1} & \frac{\partial U_3}{\partial X_2} & \frac{\partial U_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On constate qu'il s'agit d'une déformation plane, que la base principale de déformation est la base d'origine $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et que les déformations principales sont $\{A, B, 0\}$.

— On applique la loi de Hooke formulée en fonction des coefficients de Lamé :

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu \cdot \bar{\bar{\epsilon}} + \lambda \cdot \text{tr}(\bar{\bar{\epsilon}}) \cdot \bar{\bar{I}}$$

Avec :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

On a $\text{tr}(\bar{\bar{\epsilon}}) = A + B$, et il vient donc :

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot (A + B) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et finalement :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2\mu A + \lambda \cdot (A + B) & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu B + \lambda \cdot (A + B) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \cdot (A + B) \end{bmatrix}$$

Les tenseurs $\bar{\bar{\sigma}}$ et $\bar{\bar{\epsilon}}$ sont homogènes, c'est-à-dire qu'ils sont égaux en tout point du système.

— Sur la face supérieure, la pression appliquée peut se noter :

$$\vec{T}_d = -p \cdot \vec{e}_1$$

Par ailleurs, la condition aux limites d'équilibre sur cette face supérieure s'écrit :

$$\vec{\sigma} \vec{n} = \vec{T}_d$$

La normale unitaire à cette surface est $-\vec{e}_1$, donc on a $\vec{\sigma}(-\vec{e}_1) = \vec{T}_d$.

Par conséquent, on peut écrire :

$$-(2\mu A + \lambda \cdot (A + B)) \cdot \vec{e}_1 = -p \cdot \vec{e}_1$$

Et finalement :

$$2\mu A + \lambda \cdot (A + B) = p$$

On applique la même méthode sur une des faces latérales, et on obtient :

$$2\mu B + \lambda \cdot (A + B) = 0$$

Il en résulte un système linéaire de deux équations à deux inconnues A et B :

$$\begin{cases} (2\mu + \lambda)A + \lambda B = p \\ \lambda A + (2\mu + \lambda)B = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $B = \frac{-\lambda A}{2\mu + \lambda}$, que l'on réinjecte dans la première pour obtenir :

$$A \left(2\mu + \lambda - \frac{\lambda^2}{2\mu + \lambda} \right) = p$$

Après calcul, il vient :

$$A = p \frac{-2\mu - \lambda}{4\mu(\mu + \lambda)} \quad \text{et} \quad B = \frac{\lambda}{4\mu(\mu + \lambda)}$$

Sur la face inférieure, le déplacement est bloqué verticalement. En posant $X_1 = 0$, on peut donc écrire :

$$U_1(0, X_2, X_3) = 0$$

Or :

$$U_1(X_1, X_2, X_3) = A \cdot X_1 + C \cdot X_2$$

On en déduit que $C \cdot X_2 = 0 \forall (X_2, X_3)$, et donc que $C = 0$.

— En utilisant les résultats précédents, on peut réécrire le champ de déplacement :

$$\vec{U} = \begin{cases} A \cdot X_1 = p \frac{-2\mu - \lambda}{4\mu(\mu + \lambda)} \cdot X_1 \\ B \cdot X_2 = \frac{\lambda}{4\mu(\mu + \lambda)} \cdot X_2 \end{cases}$$

Les coordonnées du point M sont $X_1 = H = 0.15m$ et $X_2 = L = 0.2m$.

Par ailleurs, les coefficients de Lamé valent :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{210000}{2(1 + 0.3)} = 80770MPa$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{210000 * 0.3}{(1 + 0.3)(1 - 2 * 0.3)} = 121150MPa$$

Il vient finalement $A = -2.1666 \cdot 10^{-3}$ et $B = 9.2855 \cdot 10^{-4}$, et enfin :

$$\vec{U}(M) = \begin{cases} -0.325mm \\ 0.186mm \\ 0 \end{cases}$$

Bibliographie

- [1] Golay Frédéric - Bonelli Stéphane. Mécanique des Milieux Continus. Cours d'Enseignement Mécanique, ISTV, 2011.
- [2] Erick Ringot. Polycopie de Mécanique des Milieux Continus Élasticité Linéaire, Université PAUL SABATIER TOULOUSE 3, 2010.
- [3] Jean Coirier. Mécanique des Milieux Continus. Concepts de base, Cours et exercices avec solution, ed. Dunod, 1997.
- [4] Nicolas MOES. Cours de Mécanique des Milieux Continus. École CENTRALE DE NANTES, Septembre 2003.
- [5] François Sidorof. Mécanique des Milieux Continus. École CENTRALE DE LYON, Octobre 2010.
- [6] Jean Salençon, Mécanique des Milieux Continus Tome 1 : Concepts Généraux, École Polytechnique, Septembre 2007
- [7] P.Germain - P.Muller. Introduction a la mécanique des Milieux Continus, ed. Masson 1995.
- [8] Samuel Forest - Michel Amestoy - Gilles Damamme - Serge Kruch - Vincent Maurel - Matthieu Maziere. Mécanique des Milieux Continus, École des MINES DE PARIS, 2009. Guilhem Mollon. Introduction a la Mécanique des Milieux Continus - Exercices corrigés, POLYTECH GRENOBLE, 2012

Index

- Échelle, modélisation, validation, 33
- Éléments de calcul tensoriel, 17
- Élasticité axisymétrique, 128
- Élasticité bidimensionnelle, 121
- Équation de compatibilité, 123
- Équations de BELTRAMI, 125

- Applications de la MMC, 29

- Calcul vectoriel et analyse vectorielle, 22
- Cercle de MOHR, 94
- champ de contrainte, 84
- Cinématique du milieu continu, 65
- Composantes sphérique et déviatorique, 91
- Conditions aux limites du solide exprimées en contraintes, 97
- Conditions de compatibilité, 61
- Conservation de la masse : équation de continuité, 77
- Contraintes, 81

- Décomposition polaire, 55
- Dérivée particulière, 69
- Description eulérienne, 40
- Description lagrangienne, 35
- Diagonalisation du tenseur des contraintes, 90

- Esprit du cours, 30
- Etude des Déformation du milieu Continu, 45

- Fonction de AIRY, 126

- Formulation en fonction des déplacements, 59

- Gradient d'une transformation, 46

- Hypothèse des petites déformations, 60
- Hypothèse des petites transformations, 60
- Hypothèses principales de la MMC, 28

- interactions - cadre Newtonien, 81
- Invariants du tenseur déviateur, 92
- Invariants du tenseur des contraintes, 91

- Les concepts et leur formulation, 34
- Lignes d'émission, 38
- Lignes de courant, 41
- Loi de comportement élastique linéaire, 101
- Loi de GABRIEL LAME, 105
- Loi de HOOKE-DUHAMEL, 104

- Méthode de BELTRAMI-MITCHEL, 115
- Méthode de NAVIER, 114
- Méthode de RITZ, 117
- Méthode des éléments finis, 120
- Méthodes de résolution des problèmes d'élasticité, 111

- Permutations et déterminants, 21
- Positionnement de la MMC au sein de la mécanique, 27
- Principe des puissances virtuelles PPV, 106
- Problème d'élasticité, 111

- Propriété de la fonction d'AIRY, 127
propriétés des contraintes, 86
- Relation contraintes - déformations, 124
représentation graphique d'un état de contrainte,
92
- Taux de glissement de deux direction, 68
Taux de variation de volume, 68
Taux de variation des longueurs, 67
Tenseur des contraintes, 86
Tenseur des dilatations, 51
Tenseur gradient des vitesses, 65
Tenseur Taux de rotation, 69
Tenseur taux des déformations, 67
Tenseurs des déformations, 57
Théorème de l'énergie mécanique, 109
trajectoires, 38
Transport convectif d'un vecteur élémentaire,
50
Tricercle de MOHR, 92
Typologie des milieux continus, 29
- Unicité de la solution d'un problème d'élasti-
cité, 117
- Vecteurs et tenseurs, 17